

Math en Jeans

Année 2012-2013

Problème 1. Jamais trois sur la même ligne

On cherche à placer des jetons sur un damier $m \times n$ (m lignes, n colonnes), de façon telle que nous n'avons jamais trois pions alignés, verticalement, horizontalement, ou en diagonale. Voici par exemple un placement correct de 6 pions sur le damier 3×3 :

	•	•
•		•
•	•	

La question naturelle que l'on peut se poser est alors la suivante :

- Quel est le nombre maximum de pions que l'on peut placer sur un damier $m \times n$?

On pourra considérer dans un premier temps des damiers particuliers ($m = 1$, $m = 2$, etc., ou encore $m = n$) avant d'essayer d'en déduire des résultats généraux.

On pourrait également considérer d'autres contraintes de placement : jamais deux, jamais quatre, etc. au lieu de jamais trois ; ou encore ne pas considérer les alignements en diagonale...

Problème 2. Jamais trois sur la même ligne, version à deux joueurs

Nous considérons cette fois la version à deux joueurs du problème précédent : à tour de rôle, chaque joueur place un pion sur le damier, le premier joueur créant un alignement de trois pions perdant la partie...

La question naturelle que l'on peut se poser est alors la suivante :

- Pour des valeurs de m et n données, l'un des deux joueurs a-t-il une stratégie gagnante ? si oui laquelle ?

On pourra naturellement considérer les variations évoquées précédemment...

Problème 3. Premier rectangle

Deux joueurs vont s'affronter sur un damier $m \times n$ (m lignes, n colonnes). Le premier joueur dispose de jetons noirs, le second de jetons blancs. À tour de rôle, chaque joueur pose un jeton de sa couleur sur une case inoccupée et le premier joueur parvenant à placer ses jetons aux quatre coins d'un rectangle gagne la partie.

Voici un exemple ci-contre de configuration obtenue en cours de partie, gagnante pour le joueur noir.

•	o	o	x
•	o	•	•
o		•	x

En effet, le joueur blanc doit jouer... et il ne peut contrer les deux menaces du joueur noir, indiquées ici par des x.

Les questions naturelles sont alors les suivantes :

- Pour des valeurs de m et n données, peut-il y avoir des parties nulles (aucun des deux joueurs ne parvient à obtenir les quatre coins d'un rectangle) ?
- Pour des valeurs de m et n données, l'un des deux joueurs a-t-il une stratégie gagnante ? si oui laquelle ?

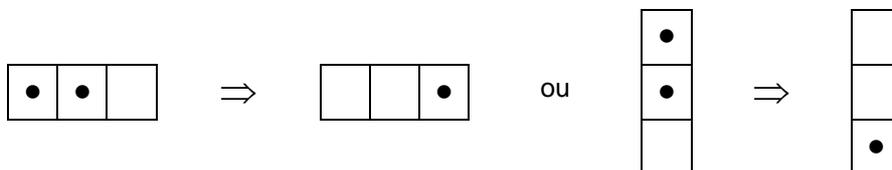
Ici encore, on pourra commencer par considérer des cas « simples », par exemple $m = 2$ ou $m = 3$...

Une variation intéressante est la suivante : le premier joueur obtenant un rectangle perd la partie. D'autres variations sont certainement possibles, n'hésitez donc pas à laisser courir votre imagination...

On pourrait également considérer que le but du jeu est d'obtenir (ou pas, selon la variante considérée) les quatre coins d'un carré plutôt que d'un rectangle (ou tout autre forme géométrique).

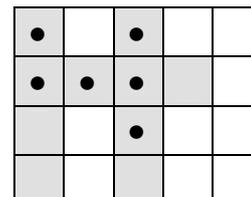
Problème 4. Solitaire

On s'intéresse au jeu de solitaire sur un damier. Initialement, le damier est dans une certaine configuration, correspondant à un ensemble de jetons disposés sur certaines de ses cases. Un coup consiste à « manger » un pion en sautant par-dessus. Il y a donc deux types de prises, horizontalement ou verticalement :



Maintenant, pour une configuration donnée, on s'intéresse aux cases « atteignables », c'est-à-dire celles qui peuvent être atteintes par un jeton après une série de coups (naturellement, les cases comportant un jeton dès le départ sont atteignables).

Voici un exemple ci-contre de configuration initiale et (sauf erreur) les cases atteignables en léger grisé :



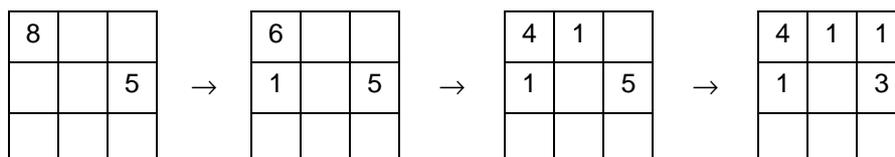
Les deux questions qui nous intéressent sont alors les suivantes :

- pour des valeurs de n et m données, quel est le nombre de jetons minimum nécessaires pour obtenir une configuration permettant d'atteindre toutes les cases ? quelle est cette configuration ?
- pour des valeurs de n et m données, quel est le nombre minimum de jetons nécessaires pour que toutes les cases soient atteignables, quelle que soit la configuration initiale contenant ce nombre de jetons ?

Là encore, on pourra dans un premier temps considérer des cas « simples », par exemple n = 1, ou n = 2...

Problème 5. Avalanches de pions

On place des colonnes de pions sur les cases d'un damier m x n (m lignes, n colonnes). Une étape élémentaire (coup) consiste à enlever deux pions de la colonne d'une case et à rajouter un pion sur la colonne d'une case voisine¹ (à chaque étape, nous avons donc un pion qui disparaît...). Voici un exemple d'une séquence de coups, chaque entier représentant le nombre de pions d'une colonne (sans faire figurer les 0) :



Nous vous proposons les questions suivantes :

- En supposant que nous plaçons au départ une seule colonne de pions, dans le coin supérieur gauche, combien de pions doit contenir cette colonne pour qu'une séquence de coups permette d'aboutir à une configuration où chaque case du damier contient au moins un pion ?
- Pour une case donnée, quel est le nombre minimal de pions pour lequel, quelle que soit la façon de répartir ces pions sur le damier, il existe une séquence de coups permettant de recueillir un pion sur cette case ?

On commencera naturellement par considérer des damiers particuliers (par exemple le damier 3 x 3)...

Bon courage à toutes et tous...

Éric SOPENA
Chercheur au LaBRI, sopena@labri.fr

¹ Deux cases « se touchant » par un coin ne sont pas considérées comme étant voisines...