

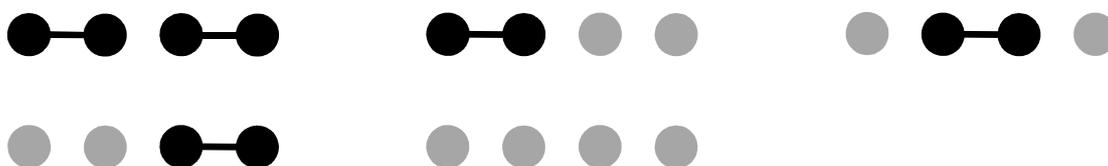
# Math en Jeans

## Année 2015-2016

### Problème 1. Nous allons peindre des cailloux !...

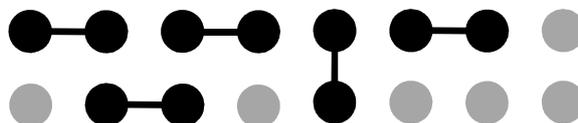
Nous disposons d'une rangée de  $n$  cailloux et de deux pinceaux. L'un des pinceaux permet de peindre en gris un caillou à la fois (on dira qu'il est de largeur 1), l'autre permet de peindre en noir deux cailloux consécutifs à la fois (on dira qu'il est de largeur 2). Le problème consiste à déterminer de combien de façons différentes il est possible de peindre la rangée de cailloux. Naturellement, lorsqu'un caillou est peint, on ne doit pas le repeindre !

Prenons par exemple une rangée de 4 cailloux. Les possibilités sont alors les suivantes, au nombre de 5 (pour indiquer les paires de cailloux peints avec le pinceau de largeur 2, on les relie par un trait) :



- Saurez-vous déterminer le nombre de façons de peindre ainsi 1, 2, 3, ...,  $n$  cailloux ?
- Que se passe-t-il pour d'autres largeurs de pinceaux (par exemple 1 et 3) ?
- Que se passe-t-il si nous avons à notre disposition plusieurs pinceaux de couleurs différentes (par exemple 3 pinceaux, de largeurs 1, 2 et 2 ou de largeur 1, 2 et 3) ?

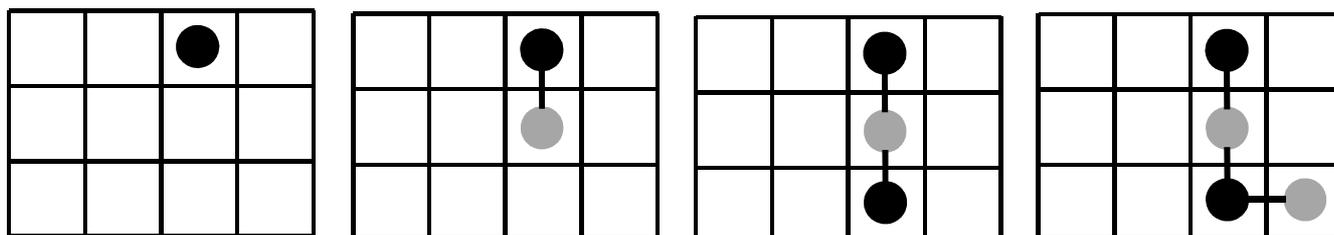
On peut également se poser cette question lorsque les cailloux sont disposés différemment. Par exemple, sous forme d'une « grille » à  $n$  rangées de  $m$  colonnes... Le pinceau de largeur 2 peut alors peindre des cailloux « horizontalement » ou « verticalement ». Voici une configuration possible, avec 2 rangées de 8 cailloux :



### Problème 2. Cheminons en cœur...

Nous allons jouer sur une grille à  $n$  lignes et  $m$  colonnes (grille  $n \times m$ ). Deux joueurs, disons Adeline et Barnabé, vont jouer à tour de rôle, Adeline jouant la première. Adeline commence par choisir une case et y place un jeton. Ensuite, chaque joueur doit placer un jeton dans une case libre, voisine (horizontalement ou verticalement) de la case que vient d'occuper son adversaire. Lorsqu'un joueur ne peut plus jouer (il n'y a aucune case libre voisine de la dernière case jouée), il perd la partie.

Regardons un exemple de début de partie, sur une grille à 3 lignes et 4 colonnes. Les jetons posés par Adeline sont noirs, ceux posés par Barnabé sont gris. Pour bien voir le « chemin » suivi par les joueurs, on relie les jetons consécutifs par un trait :



Hum... on sent bien que maintenant Barnabé va gagner la partie car Adeline va bientôt être bloquée...

Adeline avait-elle la possibilité de gagner en jouant différemment ? C'est tout l'objet de ce problème : en supposant que les deux joueurs jouent de la meilleure façon possible, qui doit gagner sur la grille précédente ?

On peut ainsi se poser les questions suivantes :

- Est-ce que Adeline peut toujours gagner sur une grille  $n \times m$  ? (Naturellement, on commencera par regarder des cas particuliers, par exemple  $n = 1$ , puis  $n = 2$ ... ou encore les grilles carrées).
- Prenons par exemple la grille  $3 \times 4$  précédente. Qui doit gagner si le premier coup est dans la case de coordonnées  $(1,1)$  ?  $(1,2)$  ? ou plus généralement  $(i, j)$  ? Qu'en est-il avec d'autres valeurs de  $n$  et  $m$  ?

Naturellement, on peut proposer ensuite différentes variantes (n'hésitez pas à en proposer vous-mêmes), que l'on peut parfois combiner entre elles, telles que par exemple :

- On peut prolonger le chemin à chacune de ses deux extrémités et non plus à la suite du dernier coup joué.
- Chaque joueur peut poser au choix 1 ou 2 jetons (en respectant toujours la même règle).
- On peut aussi prolonger le « chemin de jetons » en diagonale, c'est-à-dire que l'on considère que les cases qui partagent un coin sont voisines.
- On doit se déplacer comme le cavalier aux échecs...
- Au lieu de perdre, le premier joueur qui est bloqué gagne la partie !

### **Problème 3. Cheminons encore... mais chacun de notre côté**

---

Cette fois, chaque joueur construit son propre chemin... Barnabé va donc également choisir une case lors de son premier coup et, en cours de partie, deux chemins vont se construire petit à petit : le chemin « noir » d'Adeline, et le chemin « gris » de Barnabé. Une case libre est bien sûr une case traversée par aucun des deux chemins...

Dans cette version, on peut naturellement aussi considérer les variantes évoquées précédemment...

### **Problème 4. Et la lumière fut !**

---

Considérons à nouveau une grille  $n \times m$ , à  $n$  lignes et  $m$  colonnes. Cette fois, chaque case contient une ampoule qui peut être soit allumée, soit éteinte. La grille est équipée de  $n + m$  interrupteurs, un par ligne et un par colonne. Lorsqu'on agit sur un interrupteur ligne, toutes les ampoules de la ligne correspondante changent d'état : les ampoules allumées s'éteignent et les ampoules éteintes s'allument ! Les interrupteurs de colonne ont exactement le même effet sur la colonne à laquelle ils sont associés.

Au départ, toutes les ampoules sont allumées sauf une, dans la case de coordonnées  $(1,1)$ .

- Est-il possible, en agissant sur les interrupteurs, d'éteindre toutes les ampoules ?
- Si non, quel est le nombre maximal d'ampoules que l'on peut éteindre ?

On commencera par considérer dans un premier temps des cas particuliers, par exemple  $n = 1$  (devrait être facile...), puis  $n = 2$ , etc.

On peut également considérer d'autres configurations initiales que celle proposée ! Et, pourquoi pas, chercher à caractériser toutes les configurations qu'il est possible d'éteindre totalement.

Une suggestion de variante, pour terminer :

- Considérons des grilles carrées, de type  $n \times n$ , et rajoutons un interrupteur sur chacune des deux diagonales... Cela change-t-il quelque chose ?

D'autres idées de variante ? Si oui, n'hésitez surtout pas !...

*Sur ce, bon courage à toutes et tous...*

*Éric SOPENA*

*Chercheur au LaBRI, Eric.Sopena@labri.fr*