

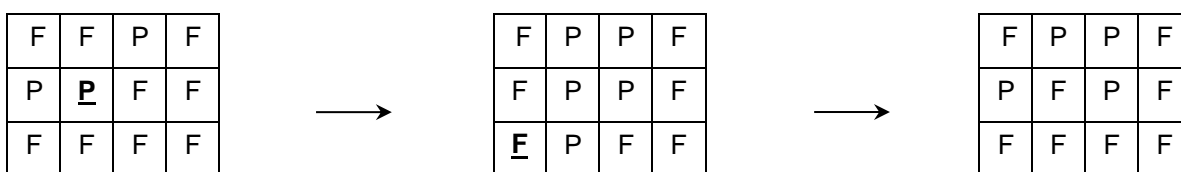
Math en Jeans

Année 2016-2017

Problème 1. Jeu de pièces...

On dispose de $m \times n$ pièces (ayant un côté « pile » et un côté « face ») disposées en m rangées de n pièces. Un « coup » consiste à choisir l'une des pièces et à retourner toutes les pièces voisines (la pièce choisie n'est pas retournée). Les voisines d'une pièce sont celles situées immédiatement au-dessus, au-dessous, à gauche ou à droite. Une pièce a ainsi au plus quatre pièces voisines. Une pièce située dans un coin n'a que deux voisines, une pièce située sur un bord (sans être dans un coin) a trois voisines.

Voici un exemple de coups à partir d'une configuration de 3 rangées de 4 pièces. Une pièce « P » correspond à un côté pile, une pièce « F » à un côté face. Pour chaque coup, la pièce choisie est en gras souligné :



Le problème qui nous intéresse est le suivant : en supposant qu'initialement toutes les pièces sont orientées côté pile ; est-il possible de les orienter toutes côté face par un succession de coups ? La réponse dépend-elle des valeurs de m et n ?

Naturellement, on pourra commencer par des cas « simples ». Par exemple, que se passe-t-il si l'on a une seule rangée de n pièces ? deux rangées de n pièces ? si $m = n$?...

Il est également toujours possible de considérer des « variantes » du problème initial. Par exemple :

- Que se passe-t-il si l'on retourne également la pièce choisie ?
- Que se passe-t-il si l'on retourne également les pièces « voisines par un coin » (une pièce non au bord possède alors 8 voisines) ? En retournant ou pas la pièce choisie ?
- Que se passe-t-il si l'on ne peut choisir à chaque coup que des pièces ayant un nombre impair de voisines côté pile ? En retournant ou pas la pièce choisie ?
- etc.

Il est également possible d'essayer de déterminer toutes les configurations de départ (ou le plus grand nombre) pour lesquelles il est possible d'obtenir au final la configuration où toutes les pièces sont côté face...

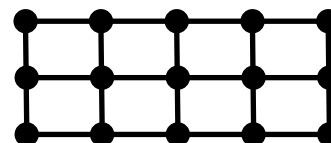
On peut enfin s'intéresser à d'autres dispositions des pièces, par exemple en triangle :

- triangle rectangle : une rangée de 1 pièce, puis de 2 pièces, de 3 pièces... de n pièces.
- triangle isocèle : une rangée de 1 pièce, puis de 3 pièces, de 5 pièces... de $2p+1$ pièces.

Problème 2. Des sommets très distingués...

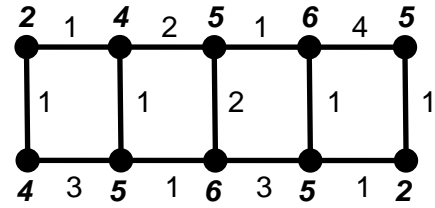
Un *graphe* est un ensemble de points (appelés *sommets*) reliés par des traits (appelés *arêtes*). Une cube est par exemple un graphe particulier, composé de 8 sommets reliés par 12 arêtes...

Une *grille de taille $m \times n$* est un graphe particulier, dont les sommets sont organisés en m lignes de n sommets, reliés entre eux de la façon suivante (grille de taille 3×5) :



Cette grille possède donc 15 sommets et... 22 arêtes ! (Combien de sommets et d'arêtes possède une grille de taille $m \times n$?)

Maintenant, on va associer un entier entre 1 et k (pour un certain k) à chaque arête du graphe et, pour chaque sommet, calculer la somme des valeurs des arêtes qui lui sont *incidentes* (c'est-à-dire qui « touchent » ce sommet : un « sommet coin » est incident à deux arêtes, un « sommet intérieur » à quatre arêtes). Un exemple est donné ci-contre, avec $k = 6$ (les sommes sont indiquées en gras italique) :



Le problème qui va nous intéresser est le suivant : on souhaite produire une telle « numérotation des arêtes » de façon à ce que toutes les valeurs (sommes) associées aux sommets soient distinctes ! Ce n'est pas le cas pour notre exemple : deux sommets ont pour valeur 2, quatre sommets ont pour valeur 5, etc. Par ailleurs, on va chercher à être « le plus efficace possible », c'est-à-dire essayer de trouver la plus petite valeur de k pour laquelle on peut produire une telle numérotation ! (La valeur de k correspond ainsi à la plus grande valeur utilisée pour numéroter les arêtes.)

Là encore, on pourra commencer par considérer des cas « simples », c'est-à-dire des grilles à une ligne, puis à deux lignes, etc.

Une variante — peut-être plus simple — est la suivante : plutôt que d'exiger que *tous les sommets* aient des valeurs distinctes, on peut souhaiter que *les sommets voisins* (c'est-à-dire reliés par une arête) aient des valeurs distinctes. Pour cette version, notre numérotation exemple est cette fois valide : les sommets voisins ont bien des valeurs distinctes...

On pourra également considérer d'autres formes de grilles : triangulaires, hexagonales, circulaires, toriques...

Problème 3. On soustrait ou on divise ?...

On s'intéresse au jeu à deux joueurs suivant. On démarre avec un entier n , par exemple $n = 20$. Tour à tour, chaque joueur peut soustraire 1, 2 ou 3 à l'entier courant, ou le diviser par deux à condition qu'il soit pair. Ainsi, le premier joueur peut passer de 20 à 19, 18, 17 ou 10 (car 20 est bien pair). Le premier joueur qui atteint la valeur 0 gagne la partie (l'autre joueur ne peut en effet plus jouer...).

Voici un exemple de partie, avec $n = 20$:

$$20 \rightarrow 18 \rightarrow 9 \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 0$$

Sur cette partie, c'est donc le premier joueur qui a gagné ! Mais les joueurs ont-ils joué au mieux ? Avec $n = 20$, préféreriez-vous jouer en premier ? en second ?

Le problème qui nous intéresse est alors le suivant : pour un entier de départ n donné, vaut-il mieux jouer en premier ou en second ?

On peut naturellement s'intéresser à d'autres jeux de ce type, en modifiant simplement l'ensemble des valeurs que l'on peut soustraire ($\{1,2,3\}$ pour notre exemple), voire l'ensemble des valeurs par lesquelles on peut diviser ($\{2\}$ pour notre exemple). Les divisions ne peuvent cependant s'appliquer qu'aux entiers multiples du diviseur... Pour ne pas « tourner en rond », on ne choisira naturellement jamais 0 comme valeur à soustraire, ni 1 comme diviseur !

Les cas suivants peuvent être intéressants :

- valeurs à soustraire $\{1,2,\dots,k\}$ pour une valeur k donnée, ensemble des diviseurs $\{2\}$ (notre exemple correspond au cas $k = 3$, mais on pourra commencer par le cas $k = 1\dots$),
- valeurs à soustraire $\{1,2,\dots,k\}$ pour une valeur k donnée, ensemble des diviseurs $\{k+1\}$,
- valeurs à soustraire $\{k,2k\}$ pour une valeur k donnée, ensemble des diviseurs $\{2\}$,
- etc.

Enfin, une variante intéressante pour chacun des cas précédents est la suivante : que se passe-t-il si on décide maintenant que le premier joueur qui atteint la valeur 0 *perd* la partie ?...

Sur ce, bon courage à toutes et tous...

Éric SOPENA

Chercheur au LaBRI, Eric.Sopena@labri.fr