

## Titre du sujet : Jeux combinatoires partisans de coloration de graphe

Nom des responsables : Paul DORBEC, Éric SOPENA, [dorbec@labri.fr](mailto:dorbec@labri.fr), [sopena@labri.fr](mailto:sopena@labri.fr).  
Équipe du LaBRI : Combinatoire et Algorithmique, thème « Graphes et Applications »

### Contexte du sujet

On considère le jeu combinatoire suivant. Soit  $G$  un graphe dont tous les sommets sont initialement non marqués, et  $A$  et  $B$  deux joueurs qui jouent alternativement. À chaque tour, un joueur choisit un sommet non marqué n'ayant lui-même aucun voisin marqué et le marque. En version *normale*, le premier joueur ne pouvant jouer (il n'existe plus aucun sommet non marqué n'ayant aucun voisin marqué) est déclaré perdant, alors qu'en version *misère* ce même joueur est déclarant gagnant.

On sait (voir par exemple les ouvrages de référence que sont [BCG01] et [Con01]) que pour un tel jeu combinatoire, tout graphe de départ est soit favorable au premier joueur soit favorable au second joueur. *Résoudre* un jeu combinatoire consiste alors (1) à trouver une façon « simple » de déterminer si un graphe est favorable au premier ou au second joueur et (2) à définir « simplement » une stratégie gagnante permettant au joueur en position favorable de gagner contre toute défense.

Ce jeu de marquage a été considéré dans la thèse d'Éric Duchêne [Duc06] sous l'appellation *jeu de domination*, et dans la thèse d'Adrien Guignard (thèse en cours). Dans le cas où le graphe de départ est une chaîne, on retrouve un jeu connu sous l'appellation *Dawson's Chess*, introduit par T.R. Dawson en 1935. Différentes versions de ce jeu sur les chaînes ont été étudiées dans [GS08].

### Travail demandé

Le jeu précédent peut être vu comme un jeu de coloration de graphes à une couleur, marquer un sommet revenant à colorier ce sommet avec cette unique couleur (marquer un sommet n'ayant aucun voisin marqué revient bien à produire une coloration propre du graphe, dans laquelle les sommets voisins ne peuvent avoir la même couleur). Par ailleurs, ce jeu est qualifié d'*impartial*, car pour chaque configuration de jeu, les deux joueurs ont les mêmes possibilités de jeu (contrairement au jeu d'échec par exemple, où les deux joueurs manipulent des pièces de couleurs différentes).

Nous souhaitons nous intéresser à une version, dite *partisane*, de ce jeu dans laquelle chaque joueur disposera de son propre ensemble de couleurs. Par exemple, le joueur  $A$  colorie les sommets qu'il choisit en rouge alors que le joueur  $B$  les colorie en bleu (la règle étant cette fois de ne jamais colorier un sommet avec une couleur identique à celle de l'un de ses voisins). Ce jeu apparaît dans [BCG01] et [Con01] sous l'appellation COL, mais il existe visiblement peu de travaux le concernant (voir [CB08]).

On cherchera à résoudre différents types de jeu basés sur cette idée, en considérant par exemple :

1. des familles de graphes particulières, plus ou moins simples (chaînes, arbres, grilles, etc.),
2. des ensembles de couleurs, disjoints pour les deux joueurs, de cardinalité 1, 2, 3, etc.,
3. des ensembles de couleurs différents mais non nécessairement disjoints.

### Références bibliographiques

- [BCG01] E.R. Berlekamp, J.H. Conway, R.K. Guy. *Winning Ways*. Deuxième éd., quatre volumes, A.K. Peters, Wellesley, Massachusetts (2001-2004).
- [CB08] A. Cincotti, T. Bossart. The game of COL on complete  $k$ -ary trees. *World Academy of Science, Engineering and Technology* 47 (2008), 82-84.
- [Con01] J.H. Conway. *On Numbers and Games*. Deuxième éd., A.K. Peters, Wellesley, Massachusetts (2001).
- [Duc06] É. Duchêne. *Jeux combinatoires sur les graphes*. Thèse de doctorat, Grenoble (2006).
- [GS08] A. Guignard, É. Sopena. Compound Node-Kayles on paths. *Theoret. Comput. Sci.* 410:21-23 (2009), 2033-2044.

**Mots-clés** : jeu combinatoire partisan – coloration de graphes.

**Remarques** : possibilité de poursuite en thèse sous réserve de l'obtention d'une allocation de recherche.