

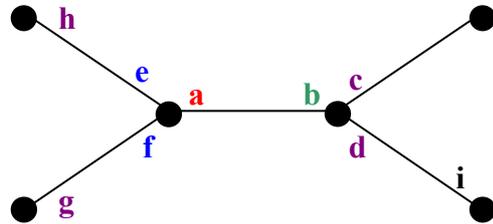
Titre du sujet : Colorations d'incidences

Nom du responsable : Éric SOPENA, sopena@labri.fr, 05 40 00 38 71

Équipe du LaBRI : Combinatoire et Algorithmique, thème « Graphes et Applications »

Contexte du sujet

Soit G un graphe non orienté. Une *incidence* de G est un couple (u, e) où u est un sommet, et e une arête incidente au sommet u (une incidence peut ainsi être assimilée à une « demi-arête »). Deux incidences (u, e) et (v, f) sont *adjacentes* si (1) $u = v$, ou (2) $e = f$, ou (3) $e = uv$. Par exemple, dans le graphe ci-contre, l'incidence **a** est adjacente aux incidences **e** et **f** (cas (1)), **b** (cas (2)), **c**, **d**, **g** et **h** (cas (3)), mais pas à l'incidence **i**...



Une *k-coloration d'incidence* d'un graphe G est une fonction associant une couleur prise dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, k\}$ à chaque incidence de G de façon telle que deux incidences adjacentes aient des couleurs distinctes. Le *nombre chromatique d'incidence* de G , noté $\chi_i(G)$, est alors le plus petit entier k tel que G admette une k -coloration d'incidence (on vérifie aisément, d'après la définition, que $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 1$ pour tout graphe G , où $\Delta(G)$ désigne le degré maximum de G).

Les colorations d'incidence ont été introduites par Brualdi et Massey [BM93] qui ont conjecturé que pour tout graphe G , $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$. Cette conjecture s'est avérée fautive par la suite mais plusieurs classes de graphes vérifient cette relation. C'est notamment le cas des graphes cubiques [M05] des graphes planaires extérieurs ou, plus généralement, des 2-arbres partiels [HSZ04]. On trouvera dans [Sop] un survol des principaux résultats concernant les colorations d'incidence.

Travail demandé

Après une étude de quelques articles publiés sur le sujet, le travail pourra s'orienter dans l'une des deux directions suivantes :

1. Pour une classe de graphes vérifiant la conjecture de Brualdi et Massey (par exemple la classe des graphes planaires extérieurs), caractériser les graphes vérifiant l'égalité $\chi_i(G) = \Delta(G) + 1$. On trouvera par exemple dans [SS08] un certain nombre de conditions suffisantes pour qu'un graphe ne vérifie pas cette égalité.
2. Prouver la conjecture de Brualdi et Massey pour d'autres classes de graphes, « simples » ou possédant de « bonnes propriétés ». On pourra alors consulter avec profit l'ouvrage de référence [BSL99].

Références bibliographiques

- [BLS99] A. Brandstädt, V.B. Le, J.P. Spinrad. *Graph Classes: A survey*. Siam monographs on Discrete Math. and Appl. (1999).
- [BM93] R.A. Brualdi, J.Q. Massey. Incidence and strong edge colorings of graphs. *Discrete Math.* 122 (1993), 51-58.
- [HSZ04] M. Hosseini Dolama, É. Sopena, X. Zhu. Incidence coloring of k -denegerated graphs. *Discrete Math.* 283 (2004), 121-128.
- [M05] M. Maydanskyi. The incidence coloring conjecture for graphs of maximum degree 3. *Discrete Math.* 292 (2005), 131-141.
- [SS08] W.C. Shiu, P.K. Sun. Invalid proofs on incidence coloring. *Discrete Math.* 308 (2008), 6575-6580.
- [Sop] É. Sopena. *The Incidence Coloring Page*.
<http://www.labri.fr/perso/sopena/pmwiki/index.php?n=TheIncidenceColoringPage.TheIncidenceColoringPage>

Mots-clés : graphe – coloration – coloration d'incidence – classe de graphes

Remarques : possibilité de poursuite en thèse sous réserve de l'obtention d'une allocation de recherche.