

## Titre du sujet : Coloration orientée des graphes de degré au plus trois

Nom du responsable : Éric SOPENA, [sopena@labri.fr](mailto:sopena@labri.fr), 05 40 00 38 71

Équipe du LaBRI : Combinatoire et Algorithmique, thème « Graphes et Applications »

### Contexte du sujet

On s'intéresse ici aux graphes orientés *antisymétriques* (sans arcs opposés), simplement appelés *orientés* par la suite. Une  $k$ -coloration d'un graphe orienté  $G$  est une application qui associe à chaque sommet de  $G$  une couleur prise dans l'ensemble  $\{1,2,\dots,k\}$  de façon telle que (1) si  $xy$  est un arc de  $G$ ,  $x$  et  $y$  ont des couleurs distinctes et (2) si  $xy$  et  $zt$  sont deux arcs de  $G$  tels que  $x$  et  $t$  sont de même couleur alors  $y$  et  $z$  doivent avoir des couleurs distinctes. Une  $k$ -coloration de  $G$  correspond donc à un *homomorphisme* de  $G$  vers un graphe orienté à  $k$  sommets (un homomorphisme de  $G$  vers  $H$  est une application  $h$  de  $V(G)$  vers  $V(H)$  qui préserve les arcs :  $uv \in A(G) \Rightarrow h(u)h(v) \in A(H)$ ). Le *nombre chromatique orienté* de  $G$  est alors défini comme le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour obtenir une telle coloration ou, de façon équivalente, comme le nombre minimum de sommets d'un graphe orienté  $H$  tel que  $G$  admet un homomorphisme vers  $H$ .

Les colorations orientées ont été introduites il y a une quinzaine d'années et, depuis, étudiées par de nombreux auteurs. Il reste cependant de nombreuses questions non résolues — ou non encore considérées à ce jour — dans ce domaine, pour la plupart inspirées de questions classiques de coloration des graphes non orientés [JT95].

Les graphes de degré au plus trois ont été considérés dans [SV96], où il est montré que tout graphe de degré au plus trois admet une 11-coloration orientée. Il est également conjecturé dans cet article que le nombre chromatique orienté de tout graphe *connexe* de degré au plus trois est d'au plus 7 (il est facile de construire un tel graphe nécessitant 7 couleurs).

### Travail demandé

Le but de ce mémoire est de travailler sur la conjecture concernant le nombre chromatique orienté des graphes de degré au plus trois (de nombreuses propriétés des graphes cubiques sont présentées dans [GP95]). Le travail pourra s'orienter dans une ou plusieurs des directions suivantes :

1. Caractériser des classes de graphes de degré au plus trois, les plus larges possible, dont le nombre chromatique orienté est au plus 7.
2. Améliorer la borne supérieure (actuellement de 11) pour certaines classes de graphes de degré au plus trois, les plus larges possible (que peut-on dire, par exemple, des graphes sans triangles ?).
3. Construire des graphes de degré au plus trois (a priori non connexes si l'on en croit la conjecture...) n'admettant pas d'homomorphismes vers des graphes ayant au plus 7 sommets (une telle construction permettrait d'améliorer la borne inférieure de 7 actuellement connue).

### Références bibliographiques

- [GP95] R. Greenlaw, R. Petreschi. Cubic graphs. *ACM Computing Surveys* 27(4) (1995), 471–495.  
 [JT95] T.R. Jensen, B. Toft. *Graph Coloring Problems*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, New-York (1995).  
 [Hos05] M. Hosseini-Dolama. *Contribution à l'étude de quelques problèmes de colorations de graphes*. Thèse de doctorat, université Bordeaux 1 (2005).  
 [Och05] P. Ochem. *Graph colorings and combinatorics on words*. Thèse de doctorat, université Bordeaux 1 (2005).  
 [Pin06] A. Pinlou. *Arc-coloration et sommet-coloration orientées*. Thèse de doctorat, université Bordeaux 1 (2006).  
 [SV96] É. Sopena, L. Vignal. A note on the oriented chromatic number of graphs with maximum degree three. Rapport de recherche, LaBRI (1996).

Note : les références [Hos05], [Och05], [Pin06] et [SV96] sont accessibles à l'URL <http://www.labri.fr/perso/sopena/>.

**Mots-clés** : coloration orientée – homomorphismes – graphe orienté – graphe de degré au plus trois.

**Remarques** : possibilité de poursuite en thèse sous réserve de l'obtention d'une allocation de recherche.