

# Titre du sujet : Nombre achromatique des graphes signés

Nom des responsables : Hervé HOCQUARD, [hocquard@labri.fr](mailto:hocquard@labri.fr), Éric SOPENA, [sopena@labri.fr](mailto:sopena@labri.fr)  
Équipe du LaBRI : Combinatoire et Algorithmique, thème « Graphes et Optimisation »

## Résumé

Un graphe signé est un graphe dont chaque arête est associée à un signe, positif ou négatif. Deux graphes signés sont équivalents si l'on peut passer de l'un à l'autre par une séquence de « *switches* », un *switch* consistant à inverser le signe de toutes les arêtes incidentes à un même sommet. Un homomorphisme d'un graphe signé  $G$  vers un graphe signé  $H$  est une application des sommets de  $G$  vers les sommets de  $H$  qui préserve les arêtes et leur signe. Le nombre chromatique d'un graphe signé  $G$  se définit alors comme l'ordre minimum d'un graphe signé complet  $K$  tel qu'il existe un homomorphisme d'un graphe signé  $G'$  équivalent à  $G$  vers  $K$ .

Il s'agit ici d'initier l'étude du nombre *achromatique* d'un graphe signé, définit comme l'ordre *maximum* d'un graphe signé complet  $K$  tel qu'il existe un homomorphisme d'un graphe signé  $G'$  équivalent à  $G$  vers  $K$  qui soit surjectif sur les sommets et les arêtes. La notion de nombre achromatique a fait l'objet de nombreux travaux dans le cadre des colorations propres de graphes (non signés) et l'objectif de ce stage est de voir dans quelle mesure ces travaux peuvent être étendus au cas des graphes signés.

**Mots-clés** : graphe – graphe signé – coloration – homomorphisme – nombre achromatique.

## Contexte du sujet

Ce sujet s'inscrit dans le cadre général des problèmes de coloration (ou d'homomorphismes) de graphes. Considérons un graphe  $G$  possédant deux sommets non adjacents  $u$  et  $v$ , et désignons par  $G_{u=v}$  le graphe obtenu en fusionnant les deux sommets  $u$  et  $v$ . On peut naturellement itérer cette opération jusqu'à obtention d'un graphe complet. Cette séquence de fusions induit une coloration propre du graphe  $G$ , obtenue en associant une même couleur à tous les sommets « ancêtres » d'un même sommet du graphe complet obtenu. Le nombre chromatique  $\chi(G)$  du graphe  $G$  correspond alors à l'ordre *minimum* d'un graphe complet que l'on peut obtenir de cette façon, et le nombre achromatique  $\psi(G)$  du graphe  $G$  à l'ordre *maximum* d'un tel graphe complet. Ainsi, d'une certaine façon, le nombre achromatique d'un graphe correspond au « pire cas » de cet algorithme de coloration par fusion de sommets non adjacents. Les graphes signés ont été introduits dans les années 1950 par Frank Harary dans le but de modéliser des réseaux sociaux. La notion de coloration de graphes signés basée sur les homomorphismes de graphes a été récemment introduite dans [NRSa, NRSb] et de nombreuses questions sont ouvertes dans ce cadre. L'intérêt principal de cette notion est qu'elle permet de « capturer » de nombreux problèmes classiques liés aux colorations ou aux homomorphismes de graphes.

## Travail demandé

Après une étude bibliographique sur le nombre achromatique dans le cas des colorations propres de graphes non signés, on essaiera de voir dans quelle mesure les principaux résultats peuvent être étendus au cas des graphes signés.

On pourra dans un premier temps considérer le cas des graphes 2-arête-colorés, *a priori* plus simple, qui peuvent être vus comme des graphes signés sans prise en considération de l'opération *switch*.

## Références

- [CZ] G. Chartrand, P. Zhang. *Chromatic Graph Theory*. CRC Press, Chapman & Hall (2009), Chapter 12: Complete Colorings, 329–358.
- [HN] P. Hell, J. Nešetřil. *Graphs and Homomorphisms*. Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications (2004).
- [HM] F. Hugues, G. MacGillivray. The achromatic number of graphs: a survey and some new results. *Bull. Inst. Combin. Appl.* 19 (1997), 27–56.
- [NRSa] R. Naserasr, E. Rollová, E. Sopena. Homomorphisms of signed graphs. *J. Graph Theory* 79 (2015), no. 3, 178–212.
- [NRSb] R. Naserasr, E. Rollová, E. Sopena. Homomorphisms of planar signed graphs to signed projective cubes. *Discrete Math. Theoret. Comput. Sci.* 15 (2013), no. 3, 1–12.