

Proposition de sujet de thèse
Colorations distinguantes

Olivier Baudon, Éric Sopena
olivier.baudon@labri.fr, eric.sopena@labri.fr

Laboratoire bordelais de recherche en informatique (LaBRI, UMR CNRS 5800)
Équipe “Combinatoire et algorithmique”, thème “Graphes et optimisation”

Mots-clés : Arête-coloration, coloration par somme, coloration par multi-somme, coloration par listes, coloration par somme modulaire.

Contexte du sujet

Il existe dans la littérature différents types d’étiquetages, d’arêtes et/ou de sommets d’un graphe, permettant de “distinguer” les sommets voisins, ou l’ensemble de tous les sommets, les uns des autres (voir [3] et [7]). Ainsi par exemple, dans la *coloration par somme*, on associe à chaque arête d’un graphe G un *poids* (ou une *étiquette*), compris entre 1 et un entier k , de façon telle que la somme des poids des arêtes incidentes, calculée pour chaque sommet, forme une coloration propre des sommets. La 1-2-3-conjecture [4] suggère que pour tout graphe sans arête isolée, il est toujours possible de construire un tel étiquetage avec $k \leq 3$.

Il existe de nombreuses variantes de ce type d’étiquetage, associant des poids aux arêtes et/ou aux sommets, où les couleurs des sommets sont déterminées par des sommes, des produits, des tuples, des ensembles ou des multi-ensembles, et pour lesquelles on cherche à distinguer tous les sommets (étiquetages *globalement distinguants*), ou les sommets voisins (étiquetages *localement distinguants*), ou encore les sommets “suffisamment proches” (étiquetages *distinguants à distance d*) (voir [5]).

Travail proposé

La bibliographie sur ce thème, bien que récent, est particulièrement riche et il conviendra de se familiariser dans un premier temps avec les principaux résultats et techniques du domaine. On pourra ensuite s’intéresser à différents aspects, structurels ou algorithmiques, en considérant en particulier les questions suivantes.

Colorations par multi-somme. Il s’agit ici d’une variante de la coloration par somme où l’on associe à chaque arête une couleur, entre 1 et c , et un poids, entre 1 et k . On calcule alors en chaque sommet v un c -uplet d’entiers, dont la i -ième composante est la somme des poids des arêtes incidentes à v de couleur i . On cherche alors à distinguer les sommets voisins, de façon *faible*, en demandant à ce que les c -uplets diffèrent sur au moins l’une de leurs composantes, ou de façon *forte*, en demandant à ce que les c -uplets diffèrent sur toutes leurs composantes.

D’autres variantes d’étiquetages distinguants pourront également être couplées avec une telle coloration d’arêtes.

Version liste de la coloration par somme. On affecte ici à chaque arête une liste de q poids distincts. Une telle affectation est alors *réalisable* s’il est possible d’associer à chaque arête l’un des poids de la liste qui lui est affectée de façon telle que la coloration induite par les sommes soit propre. On cherche alors à déterminer le plus petit entier q tel que toute affectation de listes de taille q soit réalisable.

La version liste de la coloration *totale* par somme (les poids étant affectés aux sommets et aux arêtes, la somme étant calculée sur les voisinages fermés) a été récemment considérée dans [2] et [6]. La version liste d’autres variantes d’étiquetages distinguants mérite naturellement d’être étudiée.

Coloration par somme modulaire. Dans [1], un nouveau type d’étiquetage distinguant a été introduit, où les calculs de sommes sont effectués dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour un entier n donné. Cette nouvelle version a été peu étudiée jusqu’ici et de nombreuses questions peuvent être considérées, incluant notamment les deux variantes proposées ci-dessus.

Références

- [1] E. Andrews, L. Helenius, D. Johnston, J. VerWys and P. Zhang. On twin edge colorings of graphs. *Discussions Mathematicae Graph Theory*, 34:613–627, 2014.
<https://www.degruyter.com/downloadpdf/j/dmgt.2014.34.issue-3/dmgt.1756/dmgt.1756.pdf>

- [2] M. Axenovich, J. Harant, J. Przybyło, R. Soták, M. Voigt and J. Weidelich. A note on adjacent vertex distinguishing colorings of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 205:1–7, 2016
<http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2015.12.005>
- [3] J.A. Gallian. A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*, Dynamic Survey #DS6, 9th ed., 2016.
<http://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/DS6>
- [4] M. Karoński, T. Luczak, and A. Thomason. Edge weights and vertex colours. *Journal of Combinatorial Theory, series B*, 91:151–157, 2004.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.jctb.2003.12.001>
- [5] B. Seamone. The 1-2-3 conjecture and related problems: a survey. Preprint, 2012.
<https://arxiv.org/pdf/1211.5122.pdf>
- [6] T.L. Wong and X. Zhu. Every graph is $(2;3)$ -choosable. *Combinatorica*, 36(1):121–127, 2016.
<https://link.springer.com/article/10.1007%2Fs00493-014-3057-8>
- [7] P. Zhang. *Color-Induced Graph Colorings*. Springer Briefs in Mathematics, 2015.
<https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-319-20394-2>