

Titre du sujet : Coloration d'incidence des hypergraphes

Nom des responsables : Hervé HOCQUARD, hocquard@labri.fr, Éric SOPENA, sopena@labri.fr
Équipe du LaBRI : Combinatoire et Algorithmique, thème « Graphes et Optimisation »

Résumé

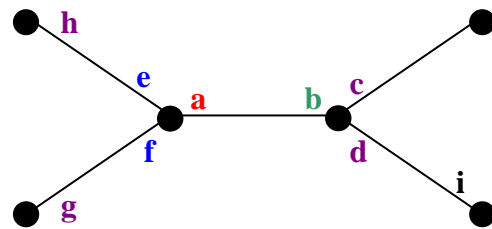
Une incidence dans un graphe non orienté est un couple (u,e) où u est un sommet, et e une arête incidente au sommet u (une incidence peut ainsi être assimilée à une « demi-arête »). La notion de coloration d'incidence a été introduite au début des années 1990 et a depuis suscité l'intérêt de nombreux chercheurs.

Il s'agit ici d'étendre cette notion aux hypergraphes et de voir dans quelle mesure certains résultats connus sur les graphes peuvent être étendus aux hypergraphes. On pourra notamment considérer le cas des hypergraphes réguliers (les graphes étant des hypergraphes 2-réguliers).

Mots-clés : graphe – hypergraphe – coloration – coloration d'incidence.

Contexte du sujet

Soit G un graphe non orienté. Une *incidence* de G est un couple (u,e) où u est un sommet, et e une arête incidente au sommet u (une incidence peut ainsi être assimilée à une « demi-arête »). Deux incidences (u,e) et (v,f) sont alors *adjacentes* si (1) $u = v$, ou (2) $e = f$, ou (3) $e = uv$. Par exemple, dans le graphe ci-contre, l'incidence **a** est adjacente aux incidences **e** et **f** (cas (1)), **b** (cas (2)), **c**, **d**, **g** et **h** (cas (3)), mais pas à l'incidence **i**...



Une *k-coloration d'incidence* d'un graphe G est une fonction associant une couleur prise dans l'ensemble $\{1,2,\dots,k\}$ à chaque incidence de G de façon telle que deux incidences adjacentes aient des couleurs distinctes. Le *nombre chromatique d'incidence* de G , noté $\chi_i(G)$, est alors le plus petit entier k tel que G admette une k -coloration d'incidence (on vérifie aisément, d'après la définition, que $\chi_i(G) \geq \Delta(G) + 1$ pour tout graphe G , où $\Delta(G)$ désigne le degré maximum de G). Les colorations d'incidence ont été introduites par Brualdi et Quinn Massey [BM93] qui ont conjecturé que pour tout graphe G , $\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$. Cette conjecture s'est avérée fautive par la suite mais plusieurs classes de graphes vérifient cette relation (voir [Sop] pour un survey en ligne).

Les hypergraphes sont une généralisation naturelle des graphes, obtenue en remplaçant la notion d'arête par celle d'hyper-arête, une *hyper-arête* étant composée d'un nombre quelconque de sommets. Un tel hypergraphe est dit *k-régulier*, $k \geq 2$, si toutes les hyper-arêtes sont composées de k sommets. Les graphes correspondent ainsi aux hypergraphes 2-réguliers. Les notions d'incidence et de coloration d'incidence s'étendent alors de façon naturelle au cas des hypergraphes.

Travail demandé

Après une étude bibliographique sur les colorations d'incidence, on étendra cette notion au cas des hypergraphes. On pourra alors voir dans quelle mesure les principaux résultats connus dans le cas des graphes s'étendent, ou pas, au cas des hypergraphes.

On pourra notamment considérer le cas des hypergraphes 3-réguliers et déterminer des bornes sur le nombre chromatique d'incidence de certaines familles particulières d'hypergraphes 3-réguliers.

Références

- [BM93] R.A. Brualdi, J.Quinn Massey. Incidence and strong edge colorings of graphs. *Discrete Math.* 122 (1993), 51-58.
[Sop] É. Sopena. *The Incidence Coloring Page*. <http://www.labri.fr/perso/sopena/TheIncidenceColoringPage>