

# Projet “RealOpt” - INRIA, IMB/LaBRI

**R**eformulations and **A**lgorithms  
for Combinatorial **O**ptimization

A. Pêcher

(la plupart des transparents sont de Cédric Joncour)

Université de Bordeaux

*Comment placer des rectangles sans chevauchement?*

# Optimisation combinatoire

Un problème d'**optimisation discrète**

$$\min\{c(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in \mathcal{S}\}$$

avec  $\mathcal{S} = \{\text{solutions admissibles}\}$ .

**Domaines d'applications:** conception de système, planification tactique, gestion des opérations ...

**Air France** – affectation des équipages,

**EDF** – planification de la production,

**France Telecom** – conception de réseaux,

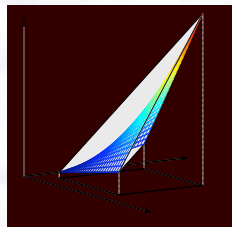
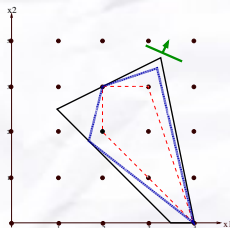
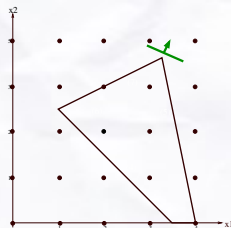
**Google** – répartition des tâches,

**Suez** – collecte des déchets.

# Reformulations

**Prog. en nb entiers mixte:**  $\min\{cx : Ax \geq b, x \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^p\}$

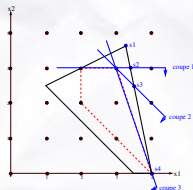
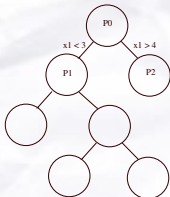
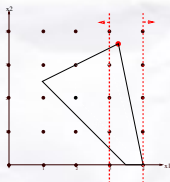
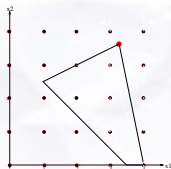
**Prog. mixte non-lin.:**  $\min\{f(x) : g(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^p\}$



“**Bonnes reformulations**”: relaxation forte, coupe polyédrale, formulation étendue, projection, convexification, décomposition.

## basés sur des approches prog. mathématique:

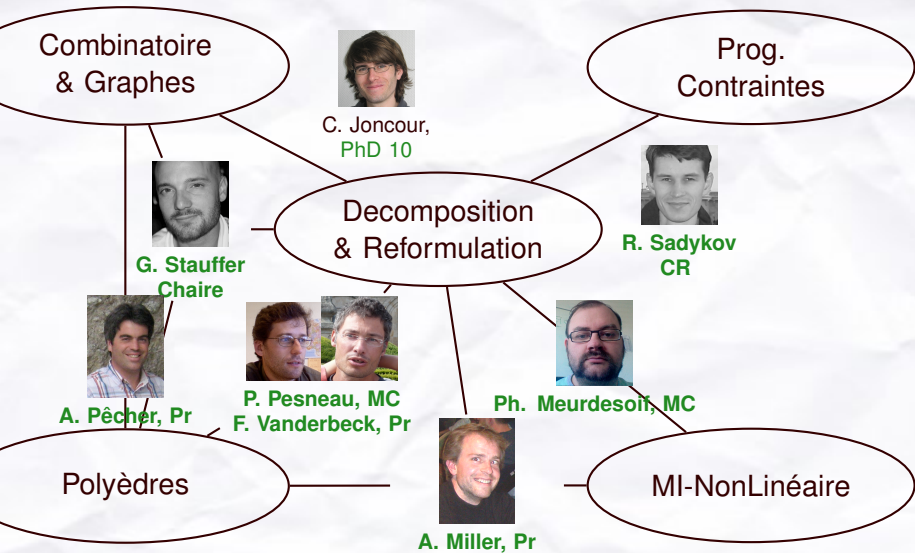
branchement/évaluation, approximations polyédrales (coupes / génération de colonnes),



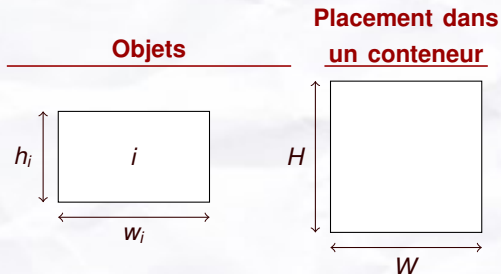
## ou non:

- programmation dynamique,
- programmation par contraintes,
- algorithmes combinatoires.

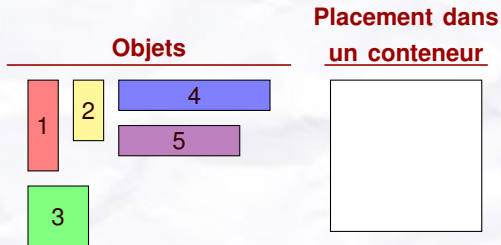
# Membres & expertise



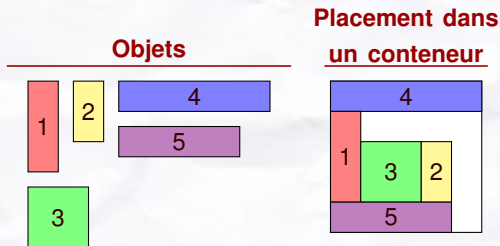
# Le problème du placement de rectangles



# Le problème du placement de rectangles

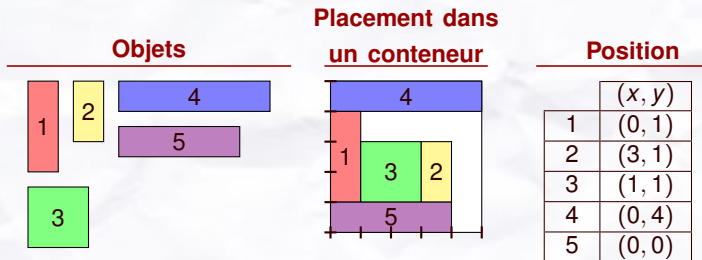


# Le problème du placement de rectangles

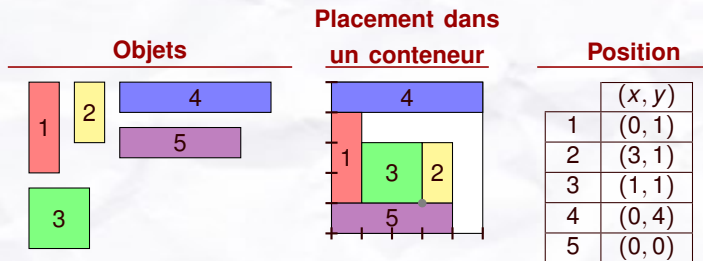




# Le problème du placement de rectangles



# Le problème du placement de rectangles



## Définition

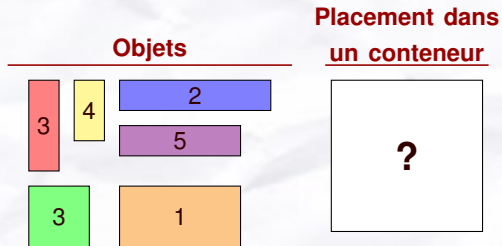
**Non-Dépassement**  $\forall i,$

$$x_i + w_i \leq W \quad \text{et} \quad y_i + h_i \leq H$$

**Non-Intersection**  $\forall i, j,$

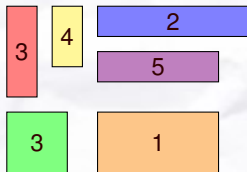
$$x_i + w_i \leq x_j \quad \text{ou} \quad x_j + w_j \leq x_i \quad \text{ou} \quad y_i + h_i \leq y_j \quad \text{ou} \quad y_j + h_j \leq y_i$$

# Le problème de sac-à-dos sur 2 dimensions

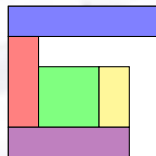


# Le problème de sac-à-dos sur 2 dimensions

## Objets

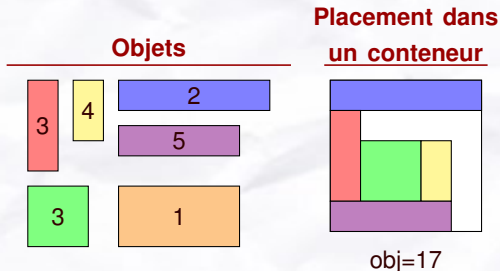


## Placement dans un conteneur



obj=17

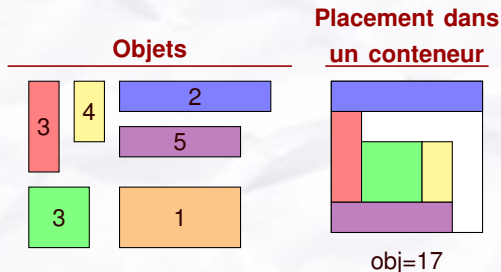
# Le problème de sac-à-dos sur 2 dimensions



## Approches exactes de résolution

- Approches par la programmation linéaire
- Approches combinatoire à deux niveaux :
  - ▶ Branchement/Evaluation pour sélectionner un sous-ensemble d'objets
  - ▶ Contrôle de la réalisabilité de chaque sous-ensemble

# Le problème de sac-à-dos sur 2 dimensions



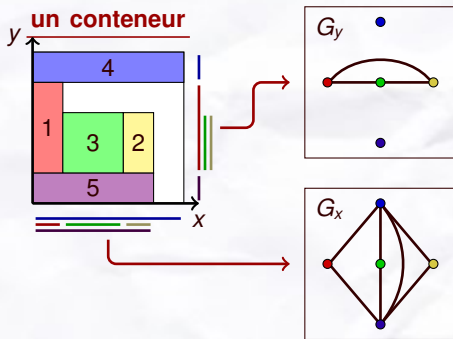
## Approches exactes de résolution

- Approches par la programmation linéaire
- Approches combinatoire à deux niveaux → la plus performante:
  - ▶ Branchement/Evaluation pour sélectionner un sous-ensemble d'objets
  - ▶ Contrôle de la réalisabilité de chaque sous-ensemble

# Propriétés des matrices de un-consécutifs

[Ordre interv.]  $G_x$  et  $G_y$  graphes d'intervalles

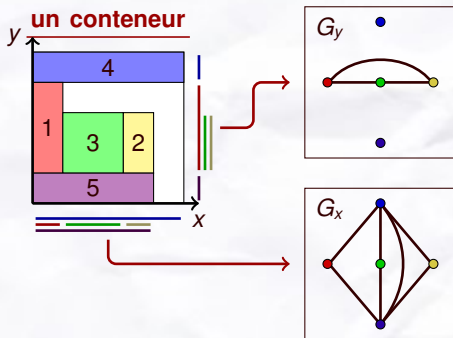
Placement dans  
un conteneur



# Propriétés des matrices de un-consécutifs

[Ordre interv.]  $G_x$  et  $G_y$  graphes d'intervalles

Placement dans  
un conteneur



## Théorème (Fulkerson & Gross [1965])

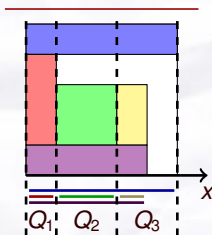
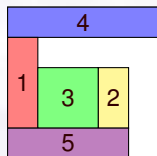
Un graphe est d'intervalle si et seulement si sa matrice sommet/cliq d'incidence a la propriété des un-consécutifs



# Propriétés des matrices de un-consécutifs

[Ordre interv.]  $G_x$  et  $G_y$  graphes d'intervalles

Placement dans  
un conteneur



Cliques maximales de  $G_x$

$$Q_1 = \{1, 4, 5\}$$

$$Q_2 = \{3, 4, 5\}$$

$$Q_3 = \{2, 4, 5\}$$

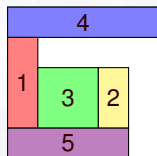
Théorème (Fulkerson & Gross [1965])

Un graphe est d'intervalle si et seulement si sa matrice sommet/cliq d'incidence a la propriété des un-consécutifs

# Propriétés des matrices de un-consécutifs

[Ordre interv.]  $G_x$  et  $G_y$  graphes d'intervalles

Placement dans  
un conteneur



Matrice incidente  
sommet/clique

sur  $x$

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 1 |

$x$

$Q_1$   $Q_2$   $Q_3$

Cliques maxi-  
males de  $G_x$

$$Q_1 = \{1, 4, 5\}$$

$$Q_2 = \{3, 4, 5\}$$

$$Q_3 = \{2, 4, 5\}$$

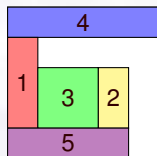
## Théorème (Fulkerson & Gross [1965])

Un graphe est d'intervalles si et seulement si sa matrice sommet/clique d'incidence a la propriété des un-consécutifs

# Propriétés des matrices de un-consécutifs

[Ordre interv.]  $G_x$  et  $G_y$  graphes d'intervalles

Placement dans  
un conteneur



----->

Matrice incidente  
sommet/cliQUE

sur  $x$

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 |
| 5 | 1 | 1 | 1 |

$x$

Cliques maxi-  
males de  $G_x$

$$Q_1 = \{1, 4, 5\}$$

$$Q_2 = \{3, 4, 5\}$$

$$Q_3 = \{2, 4, 5\}$$

|   | $Q_1$   | $Q_2$ | $Q_3$ |   |
|---|---|-------|-------|---|
| 1 | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | 1     | 0     |   |
| 2 |   | 0     | 1     |   |
| 3 |   | 0     | 1     | 0 |
| 4 |   | 1     | 1     | 1 |
| 5 |   | 1     | 1     | 1 |

[Ordre interv.]  $M^x$  et  $M^y$  prop.  
uns-consécutifs

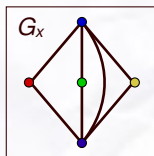
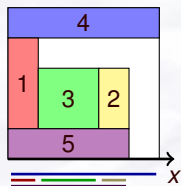
## Théorème (Fulkerson & Gross [1965])

Un graphe est d'intervalles si et seulement si sa matrice sommet/cliQUE d'incidence a la propriété des un-consécutifs

# Largueur des cliques maximales

[Non-dépass.]  $\alpha(G_x, \vec{w}) \leq W$  et  $\alpha(G_y, \vec{h}) \leq H$

## Placement conteneur



$$\alpha(G, \vec{w}) = \max \left\{ \sum_{i \in S} w_i, S \text{ ens. stable de } G \right\}$$

# Largeur des cliques maximales

[Non-dépass.]  $\alpha(G_x, \vec{w}) \leq W$  et  $\alpha(G_y, \vec{h}) \leq H$

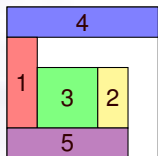
Cliques maximales de  $G_x$

$$Q_1 = \{1, 4, 5\}$$

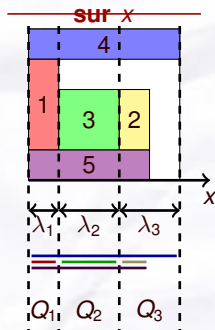
$$Q_2 = \{3, 4, 5\}$$

$$Q_3 = \{2, 4, 5\}$$

Placement  
conteneur



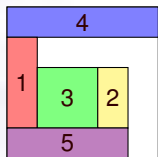
Matrice incidente  
sommet/clique



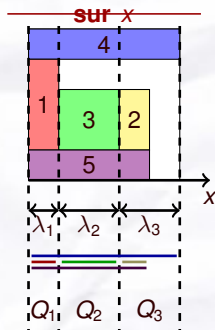
# Largeur des cliques maximales

[Non-dépass.]  $\alpha(G_x, \vec{w}) \leq W$  et  $\alpha(G_y, \vec{h}) \leq H$

**Placement  
conteneur**



**Matrice incidente  
sommet/clique**



**Cliques maxi-  
males de  $G_x$**

$$Q_1 = \{1, 4, 5\}$$

$$Q_2 = \{3, 4, 5\}$$

$$Q_3 = \{2, 4, 5\}$$

**Définition**

$$\forall Q_k^x, \lambda_k = \max_{\substack{i \in Q_k^x \\ i \notin Q_{k+1}^x}} \left\{ w_i - \sum_{\substack{l < k \\ i \in Q_l^x}} \lambda_l \right\}$$

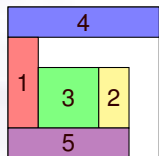
**Conditions**

- $\forall Q_k^x, \lambda_k > 0$
- $\sum_{Q_k^x} \lambda_k \leq W$

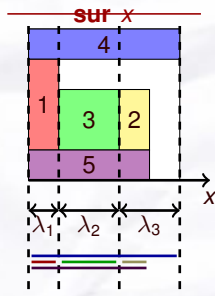
# Largeur des cliques maximales

[Non-dépass.]  $\alpha(G_x, \vec{w}) \leq W$  et  $\alpha(G_y, \vec{h}) \leq H$

**Placement  
conteneur**



**Matrice incidente  
sommet/clique**



Cliques maxi-  
males de  $G_x$

$$Q_1 = \{1, 4, 5\}$$

$$Q_2 = \{3, 4, 5\}$$

$$Q_3 = \{2, 4, 5\}$$

**Définition**

$$\forall Q_k^x, \lambda_k = \max_{\substack{i \in Q_k^x \\ i \notin Q_{k+1}^x}} \left\{ w_i - \sum_{\substack{l < k \\ i \in Q_l^x}} \lambda_l \right\}$$

**Conditions**

- $\forall Q_k^x, \lambda_k > 0$

- $\sum Q_k^x \lambda_k \leq W$

[Non-dépass.]  $\forall Q_k^x, \lambda_k > 0$  et  $\sum Q_k^x \lambda_k \leq W$   
 $\forall Q_l^y, \mu_l > 0$  et  $\sum Q_l^y \mu_l \leq H$

# Une condition nécessaire ... et suffisante

## Propriétés

- 1  $M^x$  et  $M^y$  sont mat. 0/1 avec prop. uns-consécutifs
- 2  $\forall$  colonne  $Q_k^x, \lambda_k > 0$  **et**  $\sum_{Q_k^x} \lambda_k \leq \mathbf{W}$   
 $\forall$  colonne  $Q_j^y, \mu_j > 0$  **et**  $\sum_{Q_j^y} \mu_j \leq \mathbf{H}$
- 3  $\forall i, j, \exists$  mat. tel que  $\forall$  colonne  $Q_k, i \notin Q_k$  ou  $j \notin Q_k$

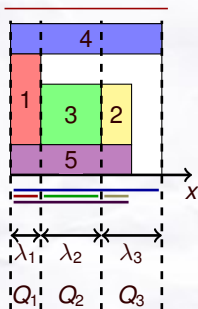


# Une condition nécessaire ... et suffisante

## Propriétés

- 1  $M^x$  et  $M^y$  sont mat. 0/1 avec prop. uns-consécutifs
- 2  $\forall$  colonne  $Q_k^x$ ,  $\lambda_k > 0$  **et**  $\sum_{Q_k^x} \lambda_k \leq \mathbf{W}$   
 $\forall$  colonne  $Q_j^y$ ,  $\mu_j > 0$  **et**  $\sum_{Q_j^y} \mu_j \leq \mathbf{H}$
- 3  $\forall i, j, \exists$  mat. tel que  $\forall$  colonne  $Q_k$ ,  $i \notin Q_k$  ou  $j \notin Q_k$

### Placement



### Cliques max

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \{1, 4, 5\} \\
 Q_2 &= \{3, 4, 5\} \\
 Q_3 &= \{2, 4, 5\}
 \end{aligned}$$

$$\forall Q_k, \lambda_k > 0$$

$$\sum_{Q_k} \lambda_k \leq W$$

|   | $Q_1$ | $Q_2$ | $Q_3$ |   |
|---|-------|-------|-------|---|
| 1 | )     | 1     | 0     | 0 |
| 2 |       | 0     | 0     | 1 |
| 3 |       | 0     | 1     | 0 |
| 4 |       | 1     | 1     | 1 |
| 5 |       | 1     | 1     | 1 |

# Une condition nécessaire ... et suffisante

## Propriétés

- 1  $M^x$  et  $M^y$  sont mat. 0/1 avec prop. uns-consécutifs
- 2  $\forall$  colonne  $Q_k^x, \lambda_k > 0$  **et**  $\sum_{Q_k^x} \lambda_k \leq \mathbf{W}$   
 $\forall$  colonne  $Q_j^y, \mu_j > 0$  **et**  $\sum_{Q_j^y} \mu_j \leq \mathbf{H}$
- 3  $\forall i, j, \exists$  mat. tel que  $\forall$  colonne  $Q_k, i \notin Q_k$  ou  $j \notin Q_k$

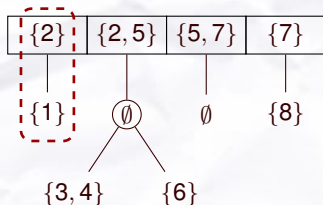
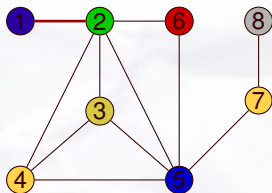
Ces propriétés sont nécessaires et **suffisantes** pour l'existence d'un placement

... mais ne permettent pas d'éliminer toutes les symétries (énumération de matrices "équivalentes") ...

# Les MPQ-arbres

## Théorème (Korte et Möhring [1989])

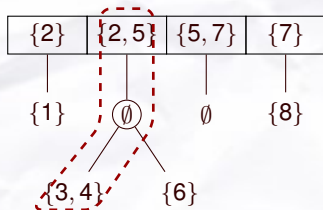
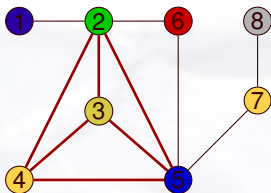
Un graphe est un graphe d'intervalles si et seulement s'il existe un MPQ-arbre associé.



# Les MPQ-arbres

## Théorème (Korte et Möhring [1989])

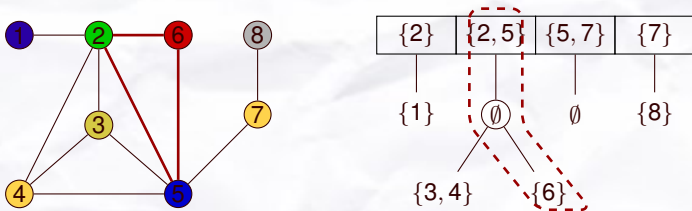
Un graphe est un graphe d'intervalles si et seulement s'il existe un MPQ-arbre associé.



# Les MPQ-arbres

## Théorème (Korte et Möhring [1989])

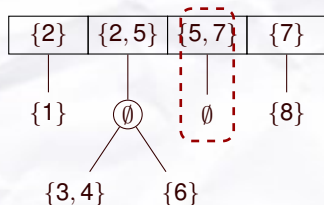
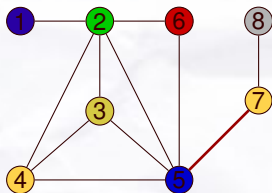
Un graphe est un graphe d'intervalles si et seulement s'il existe un MPQ-arbre associé.



# Les MPQ-arbres

## Théorème (Korte et Möhring [1989])

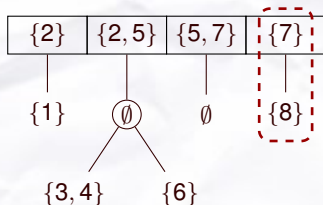
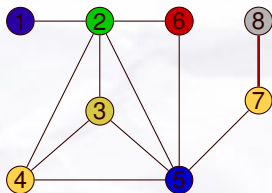
Un graphe est un graphe d'intervalles si et seulement s'il existe un MPQ-arbre associé.



# Les MPQ-arbres

## Théorème (Korte et Möhring [1989])

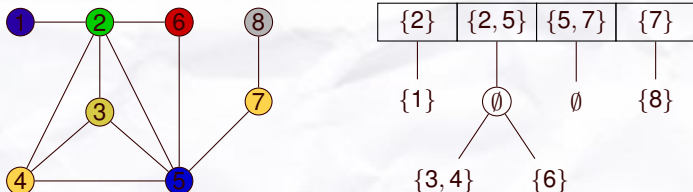
Un graphe est un graphe d'intervalles si et seulement s'il existe un MPQ-arbre associé.



# Les MPQ-arbres

## Théorème (Korte et Möhring [1989])

Un graphe est un graphe d'intervalles si et seulement s'il existe un MPQ-arbre associé.



## Propriétés d'un placement

- 1  $T^x$  et  $T^y$  sont MPQ-arbres
- 2  $\forall$  nœud  $N$  de  $T^x$ ,  $\lambda_N > 0$  **et**  $\lambda_r \leq \mathbf{W}$   
 $\forall$  nœud  $N$  de  $T^y$ ,  $\mu_N > 0$  **et**  $\mu_r \leq \mathbf{H}$
- 3  $\forall i, j$ ,  $\exists$  MPQ-arbre  $T$ ,  $i$  et  $j$  ne sont pas dans un même chemin



# Résultats: gcut

| Inst.  | Temps calcul |           |                             |
|--------|--------------|-----------|-----------------------------|
|        | Mat 0/1      | MPQ-arbre | Graphes (Fekete & Schepers) |
| gcut1  | 0            | 0         | 0                           |
| gcut2  | 0            | 0         | 0                           |
| gcut3  | 0            | 0         | 4                           |
| gcut4  | 31           | 179       | 195                         |
| gcut5  | 0            | 0         | 0                           |
| gcut6  | 0            | 0         | 0                           |
| gcut7  | 0            | 0         | 2                           |
| gcut8  | 19           | 76        | 255                         |
| gcut9  | 0            | 0         | 0                           |
| gcut10 | 0            | 0         | 0                           |
| gcut11 | 1            | 2         | 8                           |
| gcut12 | 5            | 6         | 109                         |
| gcut13 | >1800        | >1800     | >1800                       |

# Résultats: cgcut, okp

| Inst.  | Temps calcul |           |                             |
|--------|--------------|-----------|-----------------------------|
|        | Mat 0/1      | MPQ-arbre | Graphes (Fekete & Schepers) |
| cgcut1 | 0            | 0         | 0                           |
| cgcut2 | 43           | 135       | >1800                       |
| cgcut3 | 1            | 3         | 0                           |
| okp1   | 1            | 1         | 10                          |
| okp2   | 675          | 67        | 20                          |
| okp3   | 10           | 1         | 5                           |
| okp4   | 23           | 1         | 2                           |
| okp5   | >1800        | 319       | 11                          |

# Conclusion: objectifs de RealOpt

## *i*: Développements théoriques et méthodologiques.

- 1 Reformulation & Décomposition des prog. mixtes
- 2 Combinatoire et théorie des graphes
- 3 Prog. mixtes non-linéaires

## *ii*: Etude de problèmes spécifiques & Applications à large spectre.

- 1 Conception de réseaux et problèmes de routage
- 2 Problèmes de placement et de couverture
- 3 Problèmes de planification, ordonnancement et de logisitique

## *iii*: Prototypes de logiciel

- 1 Méthodes génériques: BaPCod, MINLP
- 2 Algorithmes spécifiques: ND-KNAPSACK, ...

Merci pour votre attention!