

Rotación y lenguaje Sturmiano

Salta, Noviembre 2015

1. Compara la velocidad y la cualidad de los dos siguientes códigos

```
sage: a = (3 - sqrt(5))/2          sage: a = (3 - sqrt(5.))/2
sage: for i in range(15):          sage: for i in range(15):
....:     a = a**2 - 2*a + 1      ....:     a = a**2 - 2*a + 1
sage: print a.numerical_approx()   sage: print a.numerical_approx()
```

¿En los dos casos, que tipo de dato es a ? ¿Cual es el código mas rápido? ¿Cual es el mas exacto?

2. Sea α un ángulo, construye la función `orbita(a,x,n)` que entrega la lista de los n primeros puntos de la órbita de x bajo la rotación $T_\alpha : x \mapsto (x + \alpha) \bmod 1$ (i.e. $\{x + k\alpha\}$ por $k = 0, 1, \dots, n - 1$).

3. Construye la función `coding(a,x,n)` que calcula los n primeros símbolos de la secuencia Sturmiana con ángulo α y punto inicial x (i.e. el código de l'órbita de x bajo la rotación T_α).

4. Construye la función `birkhoff(a,x,l,r,n)` que calcula las sumas de Birkhoff

$$S_k(T_\alpha, \chi_{[\ell,r]}, x) = \chi_{[\ell,r]}(x) + \chi_{[\ell,r]}(T_\alpha x) + \dots + \chi_{[\ell,r]}(T_\alpha^{k-1} x)$$

para $k = 0, 1, \dots, n - 1$. La salida debe ser una lista de n enteros.

5. Construye varios dibujos de las secuencias $(S_n(T_\alpha, \chi_{[\ell,r]}, x) - n(r - \ell))_{n \geq 0}$ y verifica el teorema de Kesten: cuando α es irracional, la secuencia es acotada si y solo si $r - \ell \in (\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z})$.

6. Construye una función `epsilon(a,n)` que calcule

$$\varepsilon_n(\alpha) := \min_{0 \leq k_1 < k_2 \leq n} \|T^{k_1} 0 - T^{k_2} 0\|$$

donde $\|x\| = \min(x, 1 - x)$.

7. Modificando la función `epsilon(a,n)` construye una función `epsilon_list(a,n)` que calcule la lista $\varepsilon_1(\alpha), \varepsilon_2(\alpha), \dots, \varepsilon_n(\alpha)$.

8. Para $\alpha = (3 - \sqrt{5})/2$ y $\alpha = \sqrt{2} - 1$ construye un gráfico de las secuencias $(n\varepsilon_n(\alpha))_{n \geq 1}$. ¿Para que valores de n hay un mínimo local? ¿un máximo local? ¿Cual es la relación con la fracción continuada de α ?

9. (*) Construye una función `language_sturmiano(a,n)` que calcule todas las palabras de longitud n que están contenidas en X_α .

10. (*) Sea u una palabra finita en el alfabeto $\{A, B\}$. Construye una función `is_sturmian(u)` que reconozca cuando u es un factor de un shift sturmiano X_α para un cierto α .

11. (*) Sea u una palabra finita en $\{A, B\}$. Construye una función `intervalo_sturmian(u)` que calcule el conjunto de los ángulos α tal que u es un factor de X_α .