

Substitutions, courbes fractales et pavages

ÉCOLE JEUNES CHERCHEURS EN INFORMATIQUE MATHÉMATIQUE

1 Codages de chemins

Avant toute chose, on va apprendre à dessiner des chemins représentés par des mots. Par exemple, étant donné le codage suivant :

$$a : (1, 0) \quad A : (-1, 0) \quad b : (0, 1) \quad B : (0, -1),$$

le mot `abaaBA` désigne le chemin  (nous nous passerons d'une définition formelle). En Sage, les mots sont représentés par la classe `Word`, le mot `abaaBA` s'écrit `Word("abaaBA")`. Le codage donné ci-dessus peut être représenté par le dictionnaire

$$\{ "a": (1, 0), "A": (-1, 0), "b": (0, 1), "B": (0, -1) \}.$$

Exercice 1. Écrivez une fonction `word_to_path(D,w)` qui renvoie la liste des sommets du chemin associé au mot `w` en utilisant le dictionnaire `D`. (Par exemple, avec le dictionnaire ci-dessus, la liste correspondant au mot `abaaBA` est $[(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 1), (3, 1), (3, 0), (2, 0)]$.)

Remarque. Vous pouvez travailler soit avec des couples d'entiers (comme ci-dessus), soit avec des vecteurs (en utilisant la fonction `vector`). L'avantage des vecteurs est que l'on peut les additionner entre eux, contrairement aux couples d'entiers.

Exercice 2. Dessinez quelques chemins en utilisant la fonction `line2d` de Sage.

2 Substitutions et courbes fractales

Une *substitution* est une application qui remplace chaque lettre d'un mot par un mot, comme par exemple $a \mapsto ab, b \mapsto bA, A \mapsto AB, B \mapsto Ba$. On peut naturellement itérer une substitution :

$$a \mapsto ab \mapsto abbA \mapsto abbAbAAB \mapsto abbAbAABbAABABBa \mapsto \dots$$

En Sage, les substitutions sont représentées par la classe `WordMorphism`. La substitution ci-dessus s'écrit `WordMorphism("a->ab,b->bA,A->AB,B->Ba")` et s'utilise ainsi :

```
sage: s = WordMorphism("a->ab,b->bA,A->AB,B->Ba")
sage: w = Word("a")
sage: s(w)
word: ab
sage: s(w,5)
word: abbAbAABbAABABBBabAABABBaABBaBaab
```

Exercice 3. En utilisant les fonctions `word_to_path` et `line2d`, dessinez et contemplez les courbes associées aux mots que l'on obtient en itérant la substitution `s`. Faites de même sur d'autres exemples en modifiant substitution `s`.

Exercice 4. Le flocon de Koch est une courbe fractale obtenue en itérant la transformation :



a) Dessinez le flocon de Koch en utilisant une substitution bien choisie et le dictionnaire

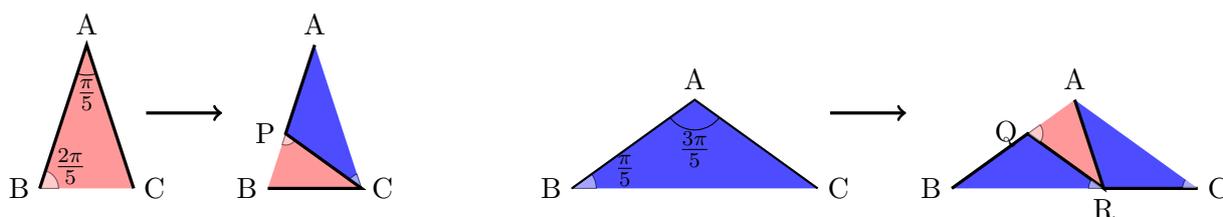
$$\begin{array}{lll} \mathbf{a} : (1, 0) & \mathbf{b} : \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = e^{\frac{i\pi}{3}} & \mathbf{c} : \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}} \\ \mathbf{A} : (-1, 0) & \mathbf{B} : \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \mathbf{C} : \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{array}$$

b) Pouvez-vous reconnaître la figure obtenue en utilisant ce dictionnaire et la substitution `WordMorphism("a->baC, b->abc, c->AcB, A->cAB, B->CBA, C->BCa")` ?

3 Le pavage de Penrose

Nous cherchons maintenant à faire le même genre de construction en dimension 2. Cette partie s'inspire beaucoup de <http://preshing.com/20110831/penrose-tiling-explained>.

Donnons-nous deux règles de substitution/subdivision sur deux triangles isocèles dont un sommet est distingué (avec les ratios $BA/PA = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dans le premier triangle et $BA/BQ = \varphi$ dans le second). Faites attention aux orientations des triangles !



Le pavage de Penrose est obtenu en itérant cette substitution à partir du triangle rouge.

Exercice 5. Nous décidons de représenter un triangle coloré comme un quadruplet $(couleur, A, B, C)$ où $couleur$ est un élément de $\{rouge, bleu\}$ et où A, B, C sont des points du plan correspondant aux sommets (ordonnés) du triangle. Un pavage sera une liste de triangles colorés.

- Définissez les triangles de base rouge et bleu.
- Écrivez une fonction `subdivise(triangle)` qui subdivise un triangle coloré selon les règles décrites ci-dessus.
- Écrivez une fonction `plot_triangle(triangle)` qui dessine un triangle coloré dans le plan.
- Écrivez une fonction `iteration(pavage, n)` qui, étant donné un pavage et un entier, dessine le pavage obtenu en itérant la subdivision n fois à partir du pavage.

4 Aller plus loin

- Pour jouer avec d'autres exemples de courbes fractales : http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension
- Tout cela est fortement lié aux L-systèmes, que vous pouvez vous amuser à programmer : <http://en.wikipedia.org/wiki/L-system>
- Sage contient la classe `WordPaths` (avec laquelle vous pouvez jouer), qui est une implémentation d'une partie des choses faites dans ce TP.
- De nombreux pavages du plan définis par substitutions (à la manière de Penrose) sont recensés sur <http://tilings.math.uni-bielefeld.de/>