

Théorie des automates

Licence 95-96

Transducteurs

Exercice 1. Montrer que la relation qui à un mot u associe l'ensemble de ses facteurs (resp. l'ensemble de ses préfixes, resp. l'ensemble de ses suffixes, resp. l'ensemble de ses sous-mots) est une transduction rationnelle.

Exercice 2. Soit $K \subset X^*$ un langage rationnel. Montrer que la relation de X^* dans X^* qui à un mot u associe l'ensemble $K^{-1}u$ est une transduction rationnelle.

Problèmes de décidabilité

Exercice 3. On s'intéresse aux deux questions suivantes:

Question 1 Étant données deux fonctions f et g , peut-on décider si $f \subset g$?

Question 2 Étant données deux fonctions f et g , peut-on décider si $f = g$?

1. Montrer que si la Question 1 admet une réponse positive, alors la Question 2 aussi.
2. Montrer que, si f et g sont deux fonctions, on a

$$f \subset g \iff \begin{cases} \text{Dom}(f) \subset \text{Dom}(g) \\ f \cup g \text{ est une fonction} \end{cases}$$

3. Montrer que l'on peut décider si une relation rationnelle est une fonction rationnelle. Pour cela, on pourra considérer un transducteur normalisé réalisant la relation rationnelle, et montrer que si u est un chemin réussi assez long, il existe une décomposition $u = u_1u_2u_3u_4$ telle que l'on ait la situation suivante:

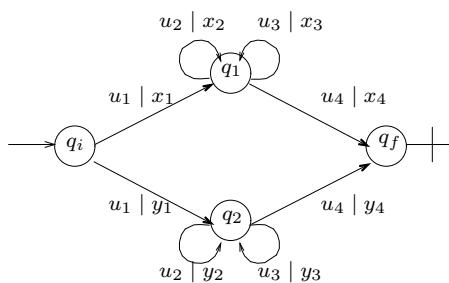


FIG. 1 – Décomposition d'un mot ayant deux sorties différentes

4. En déduire que l'égalité de deux fonctions rationnelles $f, g : A^* \rightarrow B^*$ est décidable.

Exercice 4. Deux fonctions rationnelles f et g étant données de X^* dans Y^* , avec $\text{Card}(X), \text{Card}(Y) > 2$, peut-on décider s'il existe un mot u tel que $f(u) = g(u)$?

Exercice 5. Les ensembles K et L étant donnés dans $X^* \times Y^*$, avec $\text{Card}(X), \text{Card}(Y) \geq 2$, on se pose les questions suivantes:

- (a) L'ensemble $K \cap L$ est-il vide?
- (b) A-t-on $K \subseteq L$?
- (c) A-t-on $K = L$?
- (d) A-t-on $K = X^* \times Y^*$?
- (e) L'ensemble $X^* \times Y^* \setminus K$ est-il vide?
- (f) K est-il reconnaissable?
- (g) K est-il le graphe d'une fonction rationnelle?

1. K et L sont donnés rationnels par un transducteur les réalisant. Montrer que les questions (a) à (f) sont indécidables et que la question (g) est décidable.
2. K (resp. L) est reconnaissable, donné par un monoïde fini M (resp N), un morphisme $\varphi : X^* \times Y^* \rightarrow M$ (resp. $\psi : X^* \times Y^* \rightarrow N$) et une partie $P \subseteq M$ (resp. $Q \subseteq N$) telle que $K = \varphi^{-1}(P)$ (resp. $L = \psi(Q)$). Montrer que les questions posées sont décidables.
3. K et L sont des fonctions rationnelles données par un transducteur. Montrer que les questions (b) à (g) sont décidables et que la question (a) est indécidable.

Exercice 6. Montrer l'équivalence suivante pour $K \subseteq X^*$:

$$K \text{ est reconnu par un automate fini} \iff K \text{ est reconnaissable}$$

Exercice 7. Montrer que la famille des ensembles reconnaissables de $X^* \times Y^*$ est fermée par les opérations booléennes. Montrer que si K est reconnaissable dans X^* et L reconnaissable dans Y^* , alors $K \times L$ est reconnaissable dans $X^* \times Y^*$.

Exercice 8. On se place maintenant sur le monoïde libre X^* . On reprend les questions (a) à (c) et (f) de l'exercice 5, et on remplace les questions (d) et (e) par

- (d) A-t-on $K = X^*$?
- (e) L'ensemble $K \setminus X^*$ est-il vide?

Ces questions sont-elles décidables?

Exercice 9. Montrer que l'on ne peut pas décider si l'intersection de deux langages algébriques (donnés par la grammaire qui les engendre) est vide.

Automates locaux

Dans cette partie, on ne s'intéresse qu'à des automates fortement connexes, c'est-à-dire aux automates tels que, pour tous états p, q , il existe un chemin allant de p à q .

Exercice 10. *On dit qu'un automate est non-ambigu si deux chemins ayant mêmes extrémités et même étiquette coïncident.*

1. Montrer que tout automate déterministe est non-ambigu mais que la réciproque est fausse.
2. Montrer qu'un automate qui ne possède pas deux boucles distinctes de même étiquette est non-ambigu.

Exercice 11. *Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. Il existe deux entiers $n \geq 1$ et $k \in [1, n]$ tels que deux chemins de même étiquette de longueur n $p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow \dots \rightarrow p_n$ et $q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow \dots \rightarrow q_n$ vérifient $p_k = q_k$.
2. Il existe un entier n tels que deux chemins de même étiquette u coïncident sur $|u| - n$ états.
3. Il n'existe pas deux boucles distinctes et de même étiquette dans l'automate.

Si un automate possède l'une de ces propriétés, on dit qu'il est local.

Exercice 12. 1. Les automates de la figure 2 sont-ils locaux?

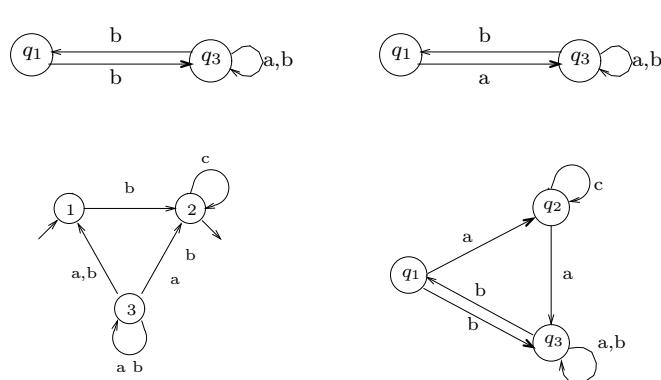


FIG. 2 – Notion de localité

2. Donner un algorithme pour décider si un automate donné est local.

Exercice 13. *On considère le code cyclique de longueur 7 et de dimension 3 associé au polynôme $X^3 + X + 1$. Donner sa matrice génératrice, sa distance. Combien d'erreurs ce code permet-il de détecter? de corriger? Donner un circuit permettant de réaliser le codage et le décodage.*

Preuves ou idées des preuves de quelques exercices

Preuve de l'exercice 1.

On considère une copie \bar{X} de X disjointe de X . Les lettres de \bar{X} sont notées sous la forme \bar{x} où $x \in X$. Pour obtenir les facteurs de u , il faut effacer certaines parties de u (un préfixe et un suffixe). De même, pour obtenir les suffixes de u , il faut cette fois effacer les préfixes de u ; pour obtenir les sous-mots de u , on efface arbitrairement certaines lettres.

Cette observation conduit à l'idée de remonter par morphisme inverse dans $(X \cup \bar{X})^*$, de sélectionner par intersection avec un rationnel les parties du mot qui seront barrées, puis d'utiliser des morphismes effaçants pour ne garder que les lettres non barrées (celles qui nous intéressent).

Soit φ le morphisme de $(X \cup \bar{X})^*$ dans X^* qui efface les barres, défini par:

$$\forall x \in X, \quad \varphi(x) = x \quad \forall \bar{x} \in \bar{X}, \quad \varphi(\bar{x}) = x$$

Soit φ_1 le morphisme qui efface les lettres de \bar{X} , défini par:

$$\forall x \in X, \quad \varphi_1(x) = x \quad \forall \bar{x} \in \bar{X}, \quad \varphi_1(\bar{x}) = \varepsilon$$

Pour $u \in X^*$, l'ensemble $\varphi^{-1}(u)$ est formé de tous les mots obtenus à partir de u en barrant arbitrairement certaines lettres.

Pour obtenir tous les sous-mots de u à partir de $\varphi^{-1}(u)$, il suffit d'effacer toutes les lettres barrées, c'est-à-dire:

$$\text{Sous-mots}(u) = \varphi_1(\varphi^{-1}(u))$$

De même, si $u = a_1 \cdots a_k$, alors $\varphi^{-1}(u) \cap X^* \bar{X}^*$ est l'ensemble des mots de la forme $a_1 \cdots a_{i-1} \bar{a}_i \cdots \bar{a}_k$ pour $i \in [1, k+1]$, et chacun des préfixes de u peut être obtenu à partir de l'un ces mots en effaçant les lettres barrées. On a donc

$$\text{Préfixes}(u) = \varphi_1(\varphi^{-1}(u) \cap X^* \bar{X}^*)$$

De la même façon, on a:

$$\text{Suffixes}(u) = \varphi_1(\varphi^{-1}(u) \cap \bar{X}^* X^*)$$

et

$$\text{Facteurs}(u) = \varphi_1(\varphi^{-1}(u) \cap \bar{X}^* X^* \bar{X}^*)$$

Tous ces ensembles s'écrivent donc sous la forme $\varphi_1^{-1}(\varphi^{-1}(u) \cap K)$ où K est un rationnel de $(X \cup \bar{X})^*$. Les relations associées sont donc bien des transductions rationnelles, d'après le théorème de Nivat. ■

Preuve de l'exercice 2.

De manière générale, si K et L sont deux langages de X^* , on a par définition

$$K^{-1}L = \{w \in X^* \mid \exists v \in K, \quad vw \in L\}$$

On peut définir de façon duale KL^{-1} . En particulier, pour $L = \{u\}$, on obtient $K^{-1}u = \{w \in X^* \mid \exists v \in K, \quad vw = u\}$. Le graphe de la relation est donc l'ensemble des couples (vw, w) avec v dans K .

On considère à nouveau la copie \bar{X} de X disjointe de X . Si $u = vw$ avec $v \in K$, on voudrait couper le mot u et oublier son préfixe v . L'idée est encore de remonter dans l'alphabet $X \cup \bar{X}$ puis d'utiliser les morphismes effaçants φ , φ_1 définis dans l'exercice 1 et le morphisme φ_2 qui efface les barres et les lettres de X , défini par :

$$\forall x \in X, \quad \varphi_2(x) = \varepsilon \quad \forall x \in \bar{X}, \quad \varphi_2(\bar{x}) = x$$

Soit $u = a_1 \cdots a_k$. Comme dans l'exercice 1, $\varphi^{-1}(u) \cap X^* \bar{X}^*$ est l'ensemble des mots de la forme $a_1 \cdots a_{i-1} \bar{a}_i \cdots \bar{a}_k$ pour $i \in [1, k+1]$.

L'image de $a_1 \cdots a_{i-1} \bar{a}_i \cdots \bar{a}_k$ par φ_1 est $a_1 \cdots a_{i-1}$ (ou ε si $i = 1$) et cette image est dans K si et seulement si $a_1 \cdots a_{i-1} \bar{a}_i \cdots \bar{a}_k$ est dans $\varphi_1^{-1}(K)$. L'ensemble $\varphi^{-1}(u) \cap X^* \bar{X}^* \cap \varphi_1^{-1}(K)$ est donc l'ensemble des mots $a_1 \cdots a_{i-1} \bar{a}_i \cdots \bar{a}_k$ tels que $a_1 \cdots a_{i-1} \in K$. L'image d'un tel mot par φ_2 est $a_i \cdots a_k$, qui est précisément suffixe de u et obtenu à partir de u en effaçant un préfixe de u appartenant à K . Réciproquement, tous ses suffixes s'obtiennent ainsi. On a donc

$$K^{-1}u = \varphi_2 \left[\varphi^{-1}(u) \cap X^* \bar{X}^* \cap \varphi_1^{-1}(K) \right]$$

Mais l'ensemble $X^* \bar{X}^*$ est un rationnel de $(X \cup \bar{X})^*$. D'autre part, K est rationnel et φ_1 est un morphisme de monoïdes libres, donc $\varphi_1^{-1}(K)$ est rationnel. L'intersection de deux rationnels dans le monoïde libre $(X \cup \bar{X})^*$ est un rationnel, donc ici $X^* \bar{X}^* \cap \varphi_1^{-1}(K)$ est un rationnel R . L'ensemble $K^{-1}u$ s'écrit donc sous la forme $\varphi_2 [\varphi^{-1}(u) \cap R]$, donc $u \mapsto K^{-1}u$ est bien rationnel d'après le théorème de Nivat. ■

Preuve de l'exercice 3.

1. $f = g$ équivaut à $f \subset g$ et $g \subset f$, donc si on a un algorithme pour répondre à la question 1, on en a aussi un pour répondre à la question 2.

2. On suppose que $f \subset g$. Ceci signifie par définition que si $f(u)$ existe, alors $g(u)$ aussi et $f(u) = g(u)$. En particulier, $\text{Dom}(f) \subset \text{Dom}(g)$. Par ailleurs, $f \subset g$ implique aussi que $\text{Card}(f(u) \cup g(u)) = \text{Card}(g(u))$ qui est inférieur à 1 puisque g est une fonction. Donc $f \cup g$ est aussi une fonction.

Réciproquement, supposons $f \not\subset g$. Ceci signifie soit qu'il existe un mot sur lequel f est définie mais pas g , c'est-à-dire que $\text{Dom}(f) \not\subset \text{Dom}(g)$, soit qu'il existe un mot u sur lequel f et g sont définies mais tel que $f(u) \neq g(u)$. Mais

alors, $f \cup g$ ne peut pas être une fonction puisque $(f \cup g)u$ est de cardinal 2. L'équivalence est donc prouvée.

3. On considère un transducteur normalisé réalisant la transduction. Soit n le nombre d'états de ce transducteur. On va montrer que si la transduction est fonctionnelle sur les mots de longueur inférieure à $2n^2 + 1$, alors elle est fonctionnelle.

Supposons le contraire: il existe un mot qui a deux images au moins; soit u un tel mot de longueur minimale. Comme la transduction est supposée fonctionnelle sur les mots de longueur $2n^2 + 1$, on a nécessairement $|u| > 2n^2 + 1$. Par définition de u , il existe deux chemins allant de l'état initial à l'état final produisant deux sorties différentes, soit si $u = u_1 \cdots u_k$:

$$\begin{aligned} q_i &= p_0 \xrightarrow{u_1} p_1 \cdots p_{k-1} \xrightarrow{u_k} p_k = q_f \\ q_i &= p'_0 \xrightarrow{u_1} p'_1 \cdots p'_{k-1} \xrightarrow{u_k} p'_k = q_f \end{aligned}$$

Mais il n'y a que n^2 couples d'états distincts, donc, dans la suite de couples d'états $(p_i, p'_i)_{1 \leq i \leq k-1}$ qui a $k-1 > 2n^2$ éléments, il existe nécessairement un couple qui apparaît trois fois au moins. Si on note (q_1, q_2) ce couple, on a exactement la situation présentée sur la figure 1. On adopte les notations de cette figure.

Comme u a été choisi de longueur minimale et comme chacun des trois mots u_1u_4 , $u_1u_2u_4$, et $u_1u_3u_4$ sont de longueur strictement plus petite que $|u|$, ils n'ont qu'une image par la transduction. C'est dire que

$$\begin{cases} x_1x_4 = y_1y_4 \\ x_1x_2x_4 = y_1y_2y_4 \\ x_1x_3x_4 = y_1y_3y_4 \end{cases}$$

On peut supposer que $|x_1| \leq |y_1|$, le problème étant symétrique. Dans ce cas, x_1 est un préfixe de y_1 d'après les égalités ci-dessus. Posons $y_1 = x_1z$. Ces égalités se réécrivent:

$$\begin{cases} x_1z = y_1 \\ x_4 = zy_4 \\ x_2x_4 = zy_2y_4 \text{ soit } x_2z = zy_2 \\ x_3x_4 = zy_3y_4 \text{ soit } x_3z = zy_3 \end{cases}$$

On a donc $x_1x_2x_3x_4 = x_1x_2x_3zy_4 = x_1x_2zy_3y_4 = x_1zy_2y_3y_4 = y_1y_2y_3y_4$, en contradiction avec le fait que les deux images de u $x_1x_2x_3x_4$ et $y_1y_2y_3y_4$ étaient supposées distinctes.

On a donc montré que la relation rationnelle est fonctionnelle si l'image de tout mot de longueur inférieure à $2n^2 + 1$ est de cardinal au plus 1. Or il n'y a qu'un nombre fini de tels mots, et on peut tester si un tel a plus d'une image (il suffit de lire tous les chemins dans l'automate étiquetés en entrée par ce mot, ils sont en nombre fini). Donc on peut décider si une relation rationnelle est une fonction.

4. D'après 1 et 2, il suffit, pour pouvoir décider de l'égalité de deux fonctions f et g , de savoir tester si $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$ et si $f \cup g$ est une fonction. On vient de voir que l'on sait tester si $f \cup g$ est une fonction: il suffit de construire un transducteur normalisé réalisant $f \cup g$ (ce qu'on sait faire à partir des transducteurs de f et g) et d'utiliser 3. Reste à montrer que l'on peut décider si $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$. Or, $\text{Dom}(f)$ (resp.) est rationnel et un automate le reconnaissant est obtenu à partir du transducteur réalisant f (resp. g) en oubliant les sorties. On a ensuite un algorithme pour tester si ces deux langages sont égaux: on déterminise leur automate, on construit leur automate minimal et on utilise l'unicité de cet automate pour un langage rationnel donné: $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$ si ces automates sont identiques (au renommage près des états). ■

Preuve de l'exercice 4.

C'est indécidable. Il existe un mot u tel que $f(u) = g(u)$ si et seulement si $f \cap g \neq \emptyset$. On va montrer que si ce problème était décidable, alors, le problème de correspondance de Post serait aussi décidable. Supposons donc que l'on peut décider si deux fonctions rationnelles, données par un transducteur, ont une intersection vide ou non. Soit $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k \in X^*$ une instance du problème de correspondance de Post. On considère un alphabet $Y = \{a_1, \dots, a_k\}$ de nouvelles lettres (i.e., $X \cap Y = \emptyset$), et on considère les ensembles rationnels suivants de $Y^* \times X^*$:

$$f = \left(\bigcup_{i \in [1, k]} (a_i, u_i) \right)^*, \quad g = \left(\bigcup_{i \in [1, k]} (a_i, v_i) \right)^*$$

Manifestement, f et g sont des fonctions: f associe à $a_{i_1} \cdots a_{i_p}$ le mot $u_{i_1} \cdots u_{i_p}$ et g lui associe le mot $v_{i_1} \cdots v_{i_p}$. Dire que l'intersection $f \cap g$ est non vide revient à dire qu'il existe un couple (v, w) dans cette intersection, et si on note $v = a_{i_1} \cdots a_{i_p}$, alors $w = f(v) = g(v)$ s'écrit $w = u_{i_1} \cdots u_{i_p} = v_{i_1} \cdots v_{i_p}$. Donc si $f \cap g \neq \emptyset$, alors le problème de correspondance de Post a une réponse positive. Réciproquement, si le problème de correspondance de Post admet une réponse positive, c'est-à-dire s'il existe i_1, \dots, i_p tels que $u_{i_1} \cdots u_{i_p} = v_{i_1} \cdots v_{i_p}$, alors le mot $a_{i_1} \cdots a_{i_p}$ a même image par f et g , donc l'intersection $f \cap g$ n'est pas vide.

En résumé, le problème de correspondance de Post admet une réponse positive sur l'instance $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k \in X^*$ si et seulement si f et g construites algorithmiquement à partir de ces mots ont une intersection non vide. Comme on a supposé que le problème de l'intersection de deux fonctions rationnelles était décidable, on a un algorithme pour dire si $f \cap g$ est vide ou non, donc on a un algorithme pour répondre au problème de correspondance de Post. Contradiction. Le problème est indécidable. ■

Preuve de l'exercice 5.

- La question (a) est indécidable pour les fonctions rationnelles, d'après l'exercice 4. *A fortiori*, elle est indécidable pour des relations rationnelles.

On va maintenant montrer que (d) est indécidable. Ceci impliquera que (b) et (c), dont (d) est un cas particulier, sont aussi indécidables. On reprend les définitions de f et g de l'exercice 4:

$$f = \left(\bigcup_{i \in [1, k]} (a_i, u_i) \right)^*, \quad g = \left(\bigcup_{i \in [1, k]} (a_i, v_i) \right)^*$$

On montre que le complémentaire de f (resp. de g), c'est-à-dire l'ensemble des couples (s, t) tels que $t \neq f(s)$ est rationnel. Il faut noter que ce n'est pas évident *a-priori*, puisque la famille des rationnels de $X^* \times Y^*$ n'est pas fermée par complément (ni par intersection). Dire que $t \neq f(s)$ revient à dire que

- i. soit t est de longueur plus courte que $f(s)$.
- ii. soit t est de longueur plus longue que $f(s)$,
- iii. soit t est de même longueur que $f(s)$, mais $s = a_{i_1} \cdots a_{i_p}$ et $t = u'_{i_1} \cdots u'_{i_p}$ avec $|u_l| = |u'_l|$ pour tout l mais $u_i \neq u'_i$ pour un certain i .

On a donc, en notant $R = \left[\bigcup_{|u|=|u_i|} (a_i, u) \right]^*$:

$$X^* \times Y^* \setminus f = \left[\bigcup_{|u| < |u_i|} (a_i, u) \right]^+ R \cup \left[\bigcup_{y \in Y} (\varepsilon, y) \right]^+ R \cup R \left[\bigcup_{\substack{|u|=|u_i| \\ u \neq u_i}} (a_i, u) \right]^+ R$$

Il apparaît sous cette forme que $X^* \times Y^* \setminus f$ est rationnel. De même, $X^* \times Y^* \setminus g$ est rationnel.

Supposons que (d) soit décidable. On pourrait alors décider si l'ensemble rationnel $(X^* \times Y^* \setminus f) \cup (X^* \times Y^* \setminus g)$ est égal à $X^* \times Y^*$, c'est-à-dire si $f \cap g = \emptyset$. Mais on a montré en 4 que ceci impliquerait que le problème de correspondance de Post serait décidable. Donc (d) est indécidable.

Pour (e), on reprend le même ensemble K , soit $X^* \times Y^* \setminus (f \cap g)$. Dire que $X^* \times Y^* \setminus K$ est fini revient à dire que $f \cap g$ est fini. Mais si $(u, v) \in f \cap g$, on a immédiatement $(u, v)^n \in f \cap g$. Donc, si $f \cap g$ contient un élément, il est infini. Donc $X^* \times Y^* \setminus K$ est fini si et seulement si il est vide, on est donc ramené au (d).

Enfin, toujours avec le même K , on montre que K est reconnaissable si et seulement si K est l'ensemble $X^* \times Y^*$ tout entier. Si $K = X^* \times Y^*$, alors K est évidemment reconnaissable comme produit de deux reconnaissables. Réciproquement, si K est reconnaissable, son complémentaire $f \cap g$ l'est aussi, car la famille des reconnaissables est fermée par les opérations booléennes. D'après le théorème de Mezei, on a donc $f \cap g = \bigcup_{i=1}^p L_i \times M_i$ où les L_i et les M_i sont des reconnaissables de X^* et Y^* respectivement. On veut montrer que $f \cap g$ est vide. Supposons le contraire, soit $(u, v) \in f \cap g$. On a vu précédemment que $(u, v)^n \in f \cap g$ pour tout $n > 0$. Donc il existe i et $n_1 \neq n_2$ tels que $(u, v)^{n_1}, (u, v)^{n_2} \in L_i \times M_i$. Mais

alors $(u^{n_1}, v^{n_2}) \in L_i \times M_i \subseteq f \cap g$. Mais puisque $(u, v)^{n_1} \in f \cap g$ et $n_1 \neq n_2$, ceci est impossible. Donc $f \cap g = \emptyset$, d'où le résultat.

La question 2. consiste à construire des morphismes reconnaissants l'intersection de deux reconnaissables ou le complément d'un reconnaissable. Cette construction est exactement celle que l'on fait sur les automates finis pour reconnaître l'intersection ou le complément d'un rationnel sur le monoïde libre. Pour l'intersection, on montre que le morphisme $\vartheta : X^* \times Y^* \longrightarrow M \times N$ défini par $\vartheta(u, v) = (\varphi(u, v), \psi(u, v))$ est tel que $\vartheta^{-1}(P \times Q) = K \cap L$. Pour le complément, on montre que $\varphi^{-1}(M \setminus P) = X^* \times Y^* \setminus K$. Toutes les questions se ramènent alors facilement à celle de déterminer si un langage reconnaissable K est vide, c'est-à-dire, en gardant les notations de l'exercice, si $\varphi^{-1}(P) = \emptyset$. Autrement dit, on cherche à savoir si $\varphi(X^* \times Y^*) \cap P = \emptyset$. Puisque P est connu, il suffit de savoir calculer $\varphi(X^* \times Y^*)$. Mais cet ensemble est simplement le sous-monoïde engendré par les éléments de la forme $\varphi(x, \varepsilon)$, $x \in X$, $\varphi(\varepsilon, y)$, $y \in Y$, et 1, éléments que l'on connaît. Par ailleurs, on sait calculer un sous-monoïde engendré par des éléments donnés dans un monoïde fini: il suffit pour cela de faire tous les produits possibles de 1, 2, ..., k éléments jusqu'à ce que ces produits ne fournissent plus d'éléments nouveaux (ce qui doit arriver puisque le monoïde est fini).

Enfin, on a déjà répondu dans les exercices précédents à 3. (a), (b), (c). La question 3 (d) est une conséquence du (c). La réponse à 3. (e) est toujours négative, et la réponse à 3. (g) toujours positive. On peut facilement montrer, grâce au théorème de Mezei, qu'une fonction rationnelle est reconnaissable si et seulement si elle est d'image finie, ce qui peut se tester sur un transducteur. ■

Preuve de l'exercice 7.

Des éléments de démonstration sont donnés au cours de la preuve de la question 2. de l'exercice 5. ■

Preuve de l'exercice 8.

Toutes ces questions sont évidemment décidables. En effet, dans le monoïde libre, si on a un automate pour le langage K et un automate pour le langage L , on sait calculer un automate reconnaissant $K \cap L$, $X^* \setminus K$, $K \setminus L = K \cap L^c$, ce qui permet facilement de répondre aux cinq premières questions. La dernière est triviale, parce tout rationnel est reconnaissable dans le monoïde libre. ■

Preuve de l'exercice 9.

On procède exactement comme pour l'exercice 4: on se donne une instance du problème de correspondance de Post $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k \in X^*$, mais ici, au lieu de construire deux fonctions rationnelles dont l'intersection est non vide si et seulement si le problème de correspondance de Post a une réponse positive, on construit deux grammaires F et G qui engendrent deux langages $L(F)$ et $L(G)$ dont l'intersection est non vide si et seulement si le problème de correspondance de Post sur l'instance donnée a une réponse positive.

À nouveau, on considère l'alphabet $Y = \{a_1 \dots a_k\}$. On peut choisir comme grammaire pour F :

$$S \longrightarrow u_1 S a_1 \mid \dots \mid u_k S a_k \mid u_1 a_1 \mid \dots \mid u_k a_k$$

et pour G :

$$S \longrightarrow v_1 S a_1 \mid \dots \mid v_k S a_k \mid u_1 a_1 \mid \dots \mid u_k a_k$$

La vérification du fait que $L(F) \cap L(G) \neq \emptyset$ équivaut au fait que le problème de correspondance de Post sur l'instance $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k$ a une réponse positive est alors facile et du même type que celle faite dans l'exercice 4. ■