

Algorithmique sur les automates Année 96-97

Exercice 1 Quels sont les cas les pires des algorithmes de Knuth-Morris, Knuth-Morris et Pratt et Boyer-Moore ? Calculer les fonctions de suppléance et du bon suffixe, puis simuler ces algorithmes sur l'entrée f_8 , où $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est définie par la récurrence $f_0 = b, f_1 = a$ et $f_{n+2} = f_{n+1}f_n$.

Exercice 2 Calculer le bord maximal de f_k .

Exercice 3 Modifier l'algorithme de Knuth-Morris et Pratt pour qu'il recherche toutes les occurrences d'un motif dans un texte.

Exercice 4 On dit que deux mots u et v sont conjugués s'il existe des mots x et y tels que $u = xy$ et $v = yx$. Montrer que la relation de conjugaison est une relation d'équivalence. Combien un mot a-t-il au plus de conjugués ? Montrer que l'algorithme naïf pour décider que deux mots sont conjugués est quadratique en moyenne et dans le cas le pire. Montrer que l'on peut décider si deux mots sont conjugués en temps linéaire.

Exercice 5 On suppose que chaque lettre a la même probabilité d'apparition dans un texte, et que l'alphabet a au moins deux lettres. Montrer que le nombre moyen de comparaisons faites par l'algorithme naïf pour rechercher un motif dans un texte de longueur n est au plus $2n$.

Exercice 6 Montrer que l'automate minimal de A^*x a $|x| + 1$ états. On étiquette de façon naturelle ces états par les préfixes de x , et on note DB_u le bord disjoint maximal de u . Montrer que la fonction de transition est définie par :

$$p \cdot a = \begin{cases} pa & \text{si } pa \text{ est préfixe de } x \\ DB_p \cdot a & \text{si } DB_p \text{ existe} \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$$

L'automate de A^*x étant construit, comment se fait la recherche du motif x ?

Exercice 7 On dit qu'une transition de l'automate de l'exercice précédent est une flèche arrière si elle ne mène ni à l'état suivant ni à ε . Montrer qu'il est suffisant de calculer seulement les flèches arrière. Montrer qu'il y a au plus $|x|$ telles flèches. Montrer qu'il existe des mots pour lesquels l'automate a effectivement $|x|$ flèches arrière.

Exercice 8 Soit $K \in \text{Rat}(A^*)$ et $L \in \text{Rat}(B^*)$. Montrer que $K \times L$ est reconnaissable en donnant un transducteur qui reconnaît cette relation. Quel est le lien avec l'automate du *shuffle* de K et L ?

Exercice 9 Soit R une relation rationnelle de $A^* \times B^*$.

1. Montrer que l'ensemble des mots qui s'envoient sur ε est un langage rationnel de A^* . Plus généralement, montrer que l'ensemble des mots qui s'envoient sur un mot donné est un langage rationnel de A^* . Montrer que l'on peut calculer ce langage à partir d'un transducteur reconnaissant R .
2. Montrer que l'image de R est rationnelle.

Exercice 10 Utiliser l'exercice précédent pour montrer qu'une fonction rationnelle est reconnaissable si et seulement si elle est d'image finie. En déduire que l'on peut décider si une fonction rationnelle est reconnaissable.

Exercice 11 Montrer que la relation qui à un mot u associe l'ensemble de ses facteurs (resp. l'ensemble de ses préfixes, resp. l'ensemble de ses suffixes, resp. l'ensemble de ses sous-mots) est une transduction rationnelle. En donner une expression rationnelle et transducteur qui la reconnaît.

Exercice 12 Montrer que toute fonction synchrone est rationnelle.

Quelles sont les fonctions de l'exercice 11 qui sont synchrones ? En utilisant l'une de ces fonctions, montrer que le produit de deux fonction synchrones n'est pas nécessairement synchrone. Retrouver ainsi le fait que l'inclusion $\text{Sync}(A^* \times B^*) \subset \text{Rat}(A^* \times B^*)$ est stricte.

Exercice 13 On se place sur l'alphabet $\{0, 1\}$. Les fonctions rationnelles suivantes sont-elles synchrones ?

- La fonction qui à un mot u associe le mot obtenu à partir de u en supprimant la première occurrence de la lettre 1.
- La fonction qui à un mot u associe le mot obtenu à partir de u en supprimant la première occurrence du facteur 01.
- La fonction qui à un mot u associe le mot obtenu à partir de u en supprimant toutes les occurrences de la lettre 1.

Exercice 14 Soit $K \subset X^*$ un langage rationnel. Montrer que la relation de X^* dans X^* qui à un mot u associe l'ensemble $K^{-1}u$ est une transduction rationnelle.

Exercice 15 On s'intéresse aux deux questions suivantes :

Question 1 Étant données deux fonctions f et g , peut-on décider si $f \subset g$?

Question 2 Étant données deux fonctions f et g , peut-on décider si $f = g$?

1. Montrer que si la *Question 1* admet un réponse positive, alors la *Question 2* aussi.
2. Montrer que, si f et g sont deux fonctions, on a

$$f \subset g \iff \begin{cases} \text{Dom}(f) \subset \text{Dom}(g) \\ f \cup g \text{ est une fonction} \end{cases}$$

3. Montrer que l'on peut décider si une relation rationnelle est une fonction rationnelle. Pour cela, on pourra considérer un transducteur normalisé réalisant la relation rationnelle, et montrer que si u est un chemin réussi assez long, il existe une décomposition $u = u_1 u_2 u_3 u_4$ telle que l'on ait la situation suivante :

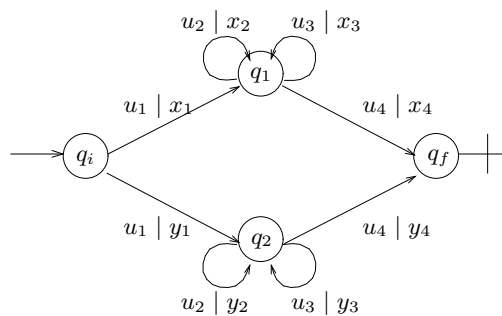


Figure 1: Décomposition d'un mot ayant deux sorties différentes

4. En déduire que l'égalité de deux fonctions rationnelles $f, g : A^* \longrightarrow B^*$ est décidable.

Exercice 16 Les ensembles K et L étant donnés dans $X^* \times Y^*$, avec $\text{Card}(X), \text{Card}(Y) \geq 2$, on se pose les questions suivantes :

- (a) L'ensemble $K \cap L$ est-il vide ?
- (b) A-t-on $K \subseteq L$?
- (c) A-t-on $K = L$?
- (d) A-t-on $K = X^* \times Y^*$?

- (e) L'ensemble $X^* \times Y^* \setminus K$ est-il vide ?
 - (f) K est-il reconnaissable ?
 - (g) K est-il le graphe d'une fonction rationnelle ?
1. K et L sont donnés rationnels par un transducteur les réalisant. Montrer que les questions (a) à (f) sont indécidables et que la question (g) est décidable.
 2. K (resp. L) est reconnaissable, donné par un monoïde fini M (resp. N), un morphisme $\varphi : X^* \times Y^* \rightarrow M$ (resp. $\psi : X^* \times Y^* \rightarrow N$) et une partie $P \subseteq M$ (resp. $Q \subseteq N$) telle que $K = \varphi^{-1}(P)$ (resp. $L = \psi(Q)$). Montrer que les questions posées sont décidables.
 3. K et L sont des *fonctions* rationnelles données par un transducteur. Montrer que les questions (b) à (g) sont décidables et que la question (a) est indécidable.

Exercice 17 Soient f et g des fonctions rationnelles de X^* dans Y^* , avec $\text{Card}(X), \text{Card}(Y) > 2$, peut-on décider s'il existe un mot u tel que $f(u) = g(u)$?

Exercice 18 Montrer que la famille des ensembles reconnaissables de $X^* \times Y^*$ est fermée par les opérations booléennes. Montrer que si K est reconnaissable dans X^* et L reconnaissable dans Y^* , alors $K \times L$ est reconnaissable dans $X^* \times Y^*$.

Exercice 19 On se place maintenant sur le monoïde libre X^* . On reprend les questions (a) à (c) et (f) de l'exercice* 16, et on remplace les questions (d) et (e) par

- (d) A-t-on $K = X^*$?
- (e) L'ensemble $K \setminus X^*$ est-il vide ?

Ces questions sont-elles décidables ?

Exercice 20 Montrer que l'on ne peut pas décider si l'intersection de deux langages algébriques (donnés par la grammaire qui les engendre) est vide.

Exercice 21 Construire un transducteur avec aussi peu d'états que possible qui remplace chaque occurrence du facteur 001 par une occurrence de 1000 dans un texte quelconque. Commenter en quelques mots les difficultés que poserait la même question s'il s'agissait de remplacer chaque occurrence du facteur 010 par une occurrence de 1000.

Exercice 22 On considère la fonction $f : A^* \longrightarrow A^*$ qui associe à tout mot u contenant une occurrence 01 le mot u privé de la première occurrence de 01 (en partant de la gauche) si une telle occurrence existe. Si une telle occurrence n'existe pas, le mot u est inchangé.

1) Montrer que la fonction f est rationnelle en donnant un transducteur qui la réalise.

2) Quel résultat de cours vous permet de dire que pour tout entier n , la fonction définie pour tout $u \in A^*$ par

$$f^n(u) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}(u)$$

est rationnelle ?

3) Montrer que pour tout mot $u \in A^*$, il existe un entier n tel que l'on ait

$$f^n(u) = f^{n+1}(u) = f^{n+2}(u) = \dots \quad (1)$$

On note n_u le plus petit entier pour lequel (1) a lieu. En donner une estimation.

4) Soit $f^* : A^* \longrightarrow A^*$ la fonction définie pour tout $u \in A^*$ par

$$f^*(u) = f^{n_u}(u)$$

Quel est l'ensemble des mots de 0^*1^* dont l'image par f^* est le mot vide ? En déduire que la fonction f^* n'est pas rationnelle.

5) La fonction f est-elle reconnaissable ?

Exercice 23 1) Un *sous-mot* v d'un mot u est un mot v obtenu en supprimant des lettres de u en nombre arbitraire. Par exemple 1001 est un sous-mot de 10100110 mais pas de 0010110. Montrer que l'ensemble des sous-mots d'un mot donné $u = a_1a_2 \dots a_n$ ($a_i \in A$ pour $i = 1, \dots, n$) est égal à l'ensemble $(a_1 + \varepsilon)(a_2 + \varepsilon) \dots (a_n + \varepsilon)$.

2) En déduire un transducteur qui réalise la relation

$$R = \{(u, v) \in A^* \times A^* \mid v \text{ est sous-mot de } u \in A^*\}$$

Comment peut-on interpréter l'entier égal au nombre des chemins étiquetés par un couple donné ?

3) Expliquer que si l'on connaît un automate reconnaissant un langage rationnel donné $L \subseteq A^*$, on peut construire très facilement un transducteur réalisant la relation suivante (justifier en quelques mots)

$$R = \{(u, v) \in A^* \times A^* \mid v \text{ est sous-mot de } u \in L\}$$

Appliquer à l'automate

