

Notes et documents de cours et TD autorisés. Autres documents interdits.

La notation tiendra compte de la clarté de la rédaction et du soin apporté dans les justifications.

Exercice 1 Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes, sans donner une justification. Barème : +0,5 pour une réponse juste, −0,5 pour une réponse fausse, 0 pour une absence de réponse.

1. L'ensemble des graphes orientés finis est dénombrable.
2. Tout langage fini est décidable.
3. Pour tous $K, L \subseteq \Sigma^*$ avec $\Sigma = \{0, 1\}$, si K se réduit à L , alors $\Sigma^* \setminus K$ se réduit à $\Sigma^* \setminus L$.
4. Tout langage sur un alphabet à une lettre est décidable.
5. Étant donné une machine de Turing M , un mot w et un entier k , on peut décider si M accepte w en au plus k pas de calcul.
6. Étant données deux machines de Turing M_1 et M_2 , on peut décider si $\mathcal{L}(M_1) \subseteq \mathcal{L}(M_2)$.
7. Il existe une infinité de fonctions récursives totales qui ne sont pas primitives récursives.
8. Le langage des mots sur l'alphabet ASCII représentant un programme C syntaxiquement correct est décidable.
9. Le complément de tout ensemble récursivement énumérable est aussi récursivement énumérable.
10. Pour tout entier $k \geq 1$, il existe une bijection primitive récursive de \mathbb{N}^k dans \mathbb{N} .

Exercice 2 Dans cet exercice les entiers seront codés en binaire. On pourra utiliser les machines usuelles de manipulation d'entiers en binaire (comparaisons, opérateurs arithmétiques,...) sans en refaire les constructions. On note $L \subseteq \{0, 1\}^*$ l'ensemble des représentations binaires des entiers non premiers (c'est-à-dire, des entiers $n \in \mathbb{N}$ qui ont un diviseur différent de n et de 1).

1. Décrire de façon informelle, mais précisément, une machine de Turing déterministe qui décide le langage L . Donner une borne supérieure (raisonnable) pour le temps de calcul de cette machine de Turing sur une entrée de taille k .
2. Décrire de façon informelle, mais précisément, une machine de Turing non-déterministe qui décide le langage L avec une complexité (en temps) polynomiale. Justifier cette complexité.

Exercice 3 Montrer que la fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \lfloor \log_2(\sqrt{n^3} + 1) \rfloor$ est primitive récursive. Ici, $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x . On pourra utiliser les fonctions primitives récursives et les schémas de construction de fonctions primitives récursives vus en cours.

Exercice 4 Soit $\Sigma = \{0, 1\}$. L'ordre *hiérarchique* \leq est un ordre (total) sur Σ^* défini par :

$$u < v \text{ si } |u| < |v|, \text{ ou } |u| = |v| \text{ et } u <_{\text{lex}} v.$$

où $<_{\text{lex}}$ est l'ordre lexicographique, avec sur Σ l'ordre $0 <_{\text{lex}} 1$.

1. Donner les 5 premiers mots de Σ^* , dans l'ordre hiérarchique.

- Donner le principe d'une machine de Turing qui sur l'entrée $k > 0$ codée en unaire, calcule le k -ième mot de Σ^* dans l'ordre hiérarchique.

On dit qu'un langage infini $L \subseteq \Sigma^*$ peut être *énuméré en ordre croissant* s'il existe une bijection calculable $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow L$ qui à chaque $n > 0$ associe le n -ième mot de L dans l'ordre hiérarchique.

- Montrer que tout langage décidable infini peut être énuméré en ordre croissant.
- Montrer que tout langage qui peut être énuméré en ordre croissant est décidable.

Exercice 5 On dit qu'une machine de Turing M sur l'alphabet d'entrée $\Sigma = \{0, 1, \dots, 9\}$ calcule la constante 2008 si quelle que soit sa donnée, elle s'arrête en ayant sur sa bande les 4 caractères 2008, entourés de \square .

- Décrire une machine de Turing qui calcule la constante 2008.
- Décrire un algorithme qui, à partir d'une machine de Turing M_1 , construit une machine de Turing M telle que M_1 accepte le mot vide si et seulement si M calcule la constante 2008.

Le problème 2008 est le suivant :

Donnée Une machine de Turing M (codée par un mot de $\{0, 1\}^*$).

Question La machine de Turing M calcule-t-elle la constante 2008 ?

- Exprimer précisément le résultat de la question précédente en terme de réduction, en justifiant.
- Montrer que le problème 2008 est indécidable, en justifiant.

Exercice 6 On rappelle que le problème de correspondance de Post (PCP en abrégé) est le suivant.

Donnée n paires de mots $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$.

Question Existe-t-il une suite d'indices i_1, \dots, i_k telle que $x_{i_1} \cdots x_{i_k} = y_{i_1} \cdots y_{i_k}$?

On rappelle également que ce problème est indécidable sur un alphabet ayant au moins deux lettres. On se place sur l'alphabet $\Sigma = \{1, 2, \dots, 9\}$. On note $v : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction qui à un mot associe l'entier ayant ce mot comme représentation en base 10. Par exemple, v associe au mot 1234 de Σ^* l'entier 1234. On note $|w|$ la longueur d'un mot w .

- Exprimer $v(xx')$ en fonction de $v(x)$, $v(x')$ et $|x'|$.

On considère la fonction f qui a un couple de mots (x, y) associe la matrice
$$\begin{pmatrix} 10^{|x|} & 10^{|x|} - 10^{|y|} & 0 \\ 0 & 10^{|y|} & 0 \\ v(x) & v(x) - v(y) & 1 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que $f(x, y)f(x', y') = f(xx', yy')$ pour tous mots x, x', y, y' sur l'alphabet Σ . On rappelle que si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq 3}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq 3}$ sont des matrices 3×3 , leur produit $C = (c_{i,j})_{1 \leq i, j \leq 3}$ est donné par $c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + a_{i,3}b_{3,j}$.
- Soit $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ une instance du PCP, et soit $M_i = f(x_i, y_i)$ pour $i = 1, \dots, n$. Dédurre de la question précédente que $x_{i_1} \cdots x_{i_k} = y_{i_1} \cdots y_{i_k}$ si et seulement si la composante (3,2) de la matrice $M_{i_1} \cdots M_{i_k}$ est nulle.
- En déduire que le problème suivant est indécidable, en justifiant soigneusement.

Donnée n matrices M_1, \dots, M_n carrées 3×3 , à coefficients dans \mathbb{Z} .

Question Existe-t-il un produit de la forme $M_{i_1} \cdots M_{i_k}$ dont la composante (3,2) est nulle ?

Exercice 7 On représente l'entier n par le λ -terme $[n] = \lambda s z . s^n z$, où $s^0 z = z$ et $s^{n+1} z = s(s^n z)$. On rappelle que les Booléens sont conventionnellement représentés par $[T] = \lambda x y . x$ (true) et $[F] = \lambda x y . y$ (false). Soit $Z = \lambda a(a(\lambda b[F])[T])$. Vérifier que $Z[0] \xrightarrow{\beta}^* [T]$, et $Z[n] \xrightarrow{\beta}^* [F]$ si $n \neq 0$.