

## Algorithmes Probabilistes – Examen

Responsable : Alexandre Zvonkine

7 janvier 2008, 9h00 – 10h30

Tous documents autorisés ; rédiger sur une copie séparée

## Une preuve non constructive d'existence

L'objectif de ce sujet est de démontrer l'existence d'un objet sans pour autant le construire explicitement. Une preuve consiste à montrer que la probabilité d'obtenir un tel objet (selon une certaine loi probabiliste) est non nulle.

**Exercice 1**

1. Trouver une coloration des arêtes du graphe complet  $K_5$  en rouge et bleu telle qu'il n'y ait pas de triangle rouge ni de triangle bleu.

2. Montrer que, quelle que soit une coloration des arêtes du graphe complet  $K_6$  en rouge et bleu, il existe toujours soit un triangle rouge, soit un triangle bleu (soit les deux).

Attention ! On colorie les arêtes, pas les sommets.

On démontrera, dans les exercices qui suivent, que si  $k \geq 4$  alors pour tout  $n \leq 2^{k/2}$  il existe une coloration des arêtes du graphe complet  $K_n$  en rouge et en bleu telle qu'il n'y ait pas de sous-graphe complet  $K_k$  monochromatique (c'est-à-dire, entièrement rouge ou entièrement bleu).

Pour cela, on se fixe un réel  $p \in [0, 1]$  et pour choisir une telle coloration, on procède de la manière suivante. Pour chaque arête  $e$  du graphe  $K_n$ , on décide grâce à une expérience aléatoire si  $e$  est rouge ou bleue. Ces expériences sont effectuées de façon indépendante et la probabilité qu'une arête soit rouge est  $p$ .

**Exercice 2** Soit  $A$  un sous-ensemble des sommets du graphe  $K_n$ ,  $|A| = k$ . Notons  $K_A$  le sous-graphe complet (on l'appelle aussi *clique*) contenant  $k$  sommets (ceux qui appartiennent à  $A$ ) ainsi que toutes les arêtes ayant leurs deux extrémités dans  $A$ .

Calculer les probabilités des événements "le graphe  $K_A$  est tout rouge" et "le graphe  $K_A$  est tout bleu".

**Exercice 3** Proposer une *majoration* pour la probabilité de l'événement suivant : "il existe un sous-graphe complet  $K_k$  monochromatique".

**Exercice 4** Lemme technique : montrer que pour  $k \geq 4$  on a  $C_n^k \leq n^k/2^k$ .

**Exercice 5** Soit un  $k \geq 4$  et  $n \leq 2^{k/2}$ . Trouver une telle valeur de  $p$  pour laquelle la probabilité de l'événement "il existe un sous-graphe complet  $K_k$  monochromatique" soit strictement inférieure à 1.

Faire une conclusion quant à l'existence d'une coloration sans sous-graphe complet monochromatique à  $k$  sommets, et la justifier.

Nous venons donc de démontrer une existence d'une coloration d'arêtes du graphe  $K_n$  n'ayant aucun sous-graphe  $K_k$  monochromatique, sans pour autant donner de méthode de la construction d'une telle coloration. Et pour cause : aucune méthode régulière (ou "théorique") qui donnerait une réponse pour tout  $k$  et tout  $n \leq 2^{k/2}$  n'est connue. Il reste, pour des valeurs particulières, à chercher une coloration voulue à l'aide de l'ordinateur.

### Exercice 6

1. Proposer un algorithme probabiliste de construction d'une telle coloration.
2. Estimer la complexité en moyenne de cet algorithme. (Attention ! Il y a un piège insoupçonné dans cette question.)
3. Comparer l'algorithme probabiliste avec l'algorithme "brute force" qui propose de passer en revue toutes les colorations possibles. Lequel des deux algorithmes est plus avantageux ?

### Dernières remarques (lire après l'examen)

1. Le problème suivant est un des problèmes classiques NP-complets :  
TRIANGLE MONOCHROMATIQUE  
– instance : un graphe  $G$  ;  
– question : existe-t-il une coloration des arêtes de  $G$  en deux couleurs telle qu'il n'y ait pas de triangle monochromatique ?
2. (a) Le plus petit entier  $n = R(k)$  tel que toute coloration des arêtes du graphe  $K_n$  contient au moins un sous-graphe complet  $K_k$  monochromatique s'appelle *nombre de Ramsey*.  
(b) L'exercice 1 montre que  $R(3) = 6$ . Les exercices de 2 à 5 montrent que pour  $k \geq 4$  on a  $R(k) > 2^{k/2}$ .  
(c) On sait que  $R(4) = 18$  mais déjà la valeur exacte de  $R(5)$  n'est pas connue : on sait seulement que  $43 \leq R(5) \leq 49$ . Les bornes pour  $R(6)$  sont  $102 \leq R(6) \leq 165$ . Notons que la preuve ci-dessus donne seulement une borne  $R(6) > 2^{6/2} = 8$ .