

Devoir à la maison

Rendre au responsable de TD avant Noël

Il n'est pas interdit, et même conseillé, de travailler par équipes.

Mais chaque étudiant(e) doit rédiger sa copie lui(elle)-même.

Polynômes de Chebyshev

Pafnoutii Lvovitch Chebyshev (Пафнутий Львович Чебышев) – mathématicien russe (1821–1894). Il rédigeait ses travaux en français et écrivait son nom Tchebicheff, mais aujourd'hui c'est la translittération anglo-saxonne qui est utilisée plus souvent.

On sait que $\cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1$ et $\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi$. Il se trouve que, plus généralement, $\cos n\varphi$ s'exprime comme un polynôme de degré n en $\cos \varphi$:

$$\cos n\varphi = T_n(\cos \varphi).$$

Les polynômes $T_n(x)$ s'appellent *polynômes de Chebyshev de première espèce*.

Exercice 1. Montrer la relation de récurrence

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_n(x) &= 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad \text{pour } n \geq 2. \end{aligned} \quad (1)$$

Indication : Utiliser les formules

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (2)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad (3)$$

pour $\alpha = (n-1)\varphi$, $\beta = \varphi$.

Exercice 2. Calculer les polynômes T_4 , T_5 .

Pour le sinus, une formule similaire peut être établie :

$$\sin(n+1)\varphi = U_n(\cos \varphi) \sin \varphi,$$

où $U_n(x)$ est un polynôme de degré n . Les polynômes $U_n(x)$ s'appellent *polynômes de Chebyshev de seconde espèce*. Par exemple, on peut vérifier que $\sin 2\varphi = 2 \cos \varphi \sin \varphi$ et $\sin 3\varphi = (4 \cos^2 \varphi - 1) \sin \varphi$.

Exercice 3. Montrer que les polynômes $U_n(x)$ vérifient la même relation de récurrence que les $T_n(x)$,

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x) \quad \text{pour } n \geq 2, \quad (4)$$

avec les données initiales $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$.

Indication : Utiliser les formules analogues à (2) et (3) pour le sinus.

Exercice 4. Calculer les polynômes U_3 , U_4 .

Exercice 5. Quelle relation sur les polynômes de Chebyshev peut-on déduire de l'égalité

$$\cos^2 n\varphi + \sin^2 n\varphi = 1 ?$$

Vérifier la relation ainsi obtenue pour $n = 5$.

Exercice 6. Montrer que pour tous $m, n \geq 1$ on a

$$T_m(T_n(x)) = T_n(T_m(x)).$$

Exercice 7. Soit $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$ les racines n -ème de l'unité, et $\omega^k = x_k + iy_k$. Comment exprimer les coordonnées x_k , $k = 0, \dots, n-1$ à l'aide des polynômes de Chebyshev ?

Exercice 8. Montrer que le déterminant de la matrice $n \times n$ suivante

$$\begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2x \end{pmatrix}$$

est égal à $U_n(x)$. Quel changement faut-il faire pour obtenir, en tant que déterminant, $T_n(x)$?

Exercice 9. Montrer que l'application directe des relations (1) et (4) pour calculer les polynômes T_n et U_n donne un algorithme de complexité $O(n^2)$.

Exercice 10. En utilisant les formules (2) et (3), ainsi que les formules analogues pour le sinus, proposer un algorithme de calcul de T_n et U_n ayant la complexité $O(n \log^2 n)$.