

Compléments de Mathématiques et d'Algorithmique

21 janvier 2004

Durée 3 heures ; tous documents autorisés

Barème envisagé : 10 + 10

Exercice 1. Découpage de rectangle en rectangles. Un rectangle de fer-blanc (de carton, de papier...) est découpé en morceaux rectangulaires : voir un exemple sur la figure 1. À un découpage comme celui-ci, on associe un graphe de la manière suivante :

- Les arêtes du graphe correspondent aux morceaux rectangulaires.
- Les sommets du graphe correspondent aux segments horizontaux les plus longs possibles (éventuellement formés de plusieurs côtés de rectangles).
- Les extrémités de chaque arête-“rectangle” sont les deux sommets-“segments” qui bornent le rectangle par le haut et par le bas.

Le graphe est considéré comme un réseau électrique. L'intensité du courant qui passe par une arête est égale à la largeur du rectangle correspondant. L'orientation du courant est “du haut vers le bas” du rectangle.

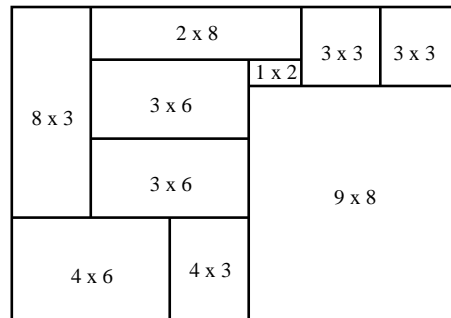


FIG. 1 – Un rectangle de taille 12×17 est découpé en petits rectangles dont les dimensions sont indiquées. Le graphe correspondant contient 6 sommets et 10 arêtes.

(A) Dessiner le graphe correspondant au découpage de la figure 1. Marquer les courants qui passent par chaque arête.

(B) Vérifier que les courants satisfont les lois de Kirchhoff dans tous les sommets sauf deux. Expliquer pourquoi. Quels sont les sommets exceptionnels ? Quel est le courant total qui passe par le réseau ?

(C) On interprète les hauteurs des rectangles comme les différences de potentiels entre deux sommets (lesquels ?). Comment alors interpréter géométriquement les résistances des arêtes ? Quel serait le sens géométrique de la condition “toutes les résistances sont égales à 1 ?”

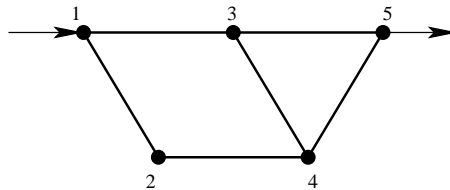


FIG. 2 – Un réseau électrique. La résistance de chaque arête est égale à 1 ; le courant d’intensité 11 passe entre les sommets 1 et 5.

On considère maintenant le réseau montré sur la figure 2. On pose toutes les résistances égales à 1, et on pose le potentiel V_5 dans le sommet 5 égal à 0. Le courant d’intensité 11 passe par le réseau entre les sommets 1 et 5.

(D) Écrire le système des équations de Kirchhoff pour ce réseau.

(E) Résoudre le système et trouver les courants qui passent par toutes les arêtes ainsi que les potentiels dans tous les sommets.

(F) Dessiner le découpage correspondant d’un rectangle.

Exercice 2. Polynômes creux. Un polynôme est *creux* s’il possède très peu de coefficients non nuls par rapport à son degré (on peut imaginer un polynôme de degré 10000 ayant seulement 13 coefficients non nuls). Représenter un polynôme creux sous forme d’une liste de ses coefficients n’est pas raisonnable : il est mieux d’avoir une liste des coefficients non nuls et de degrés correspondants. Aussi, pour les polynômes creux, les méthodes habituelles de multiplication sont déconseillées car elles perdent trop de temps en manipulant des zéros.

(A) Soit deux polynômes creux ayant m et n termes non nuls respectivement. Quel est le nombre maximum de termes non nuls dans le produit de ces deux polynômes ? Justifier la réponse.

Soit deux polynôme creux

$$P(x) = \sum_{i=1}^m a_i x^{p_i}, \quad Q(x) = \sum_{j=1}^n b_j x^{q_j},$$

représentés par des listes de paires

$$(a_1, p_1), (a_2, p_2), \dots, (a_m, p_m), \quad (b_1, q_1), (b_2, q_2), \dots, (b_n, q_n),$$

où les degrés p_1, \dots, p_m et q_1, \dots, q_n sont donnés en ordre croissant. On suppose que $m \leq n$.

On propose la méthode suivante de multiplication de P et Q .

Étape 1. On fabrique des polynômes $R_i(x)$, $j = 1, 2, \dots, m$, où chaque R_i et le résultat de multiplication de Q par un monôme de P .

Étape 2. On choisit $m/2$ paires des polynômes R_i , et on calcule $m/2$ sommes correspondantes ; on répète cette opération récursivement avec $m/2$ polynômes ainsi obtenus, et cela jusqu'à l'obtention de la somme de tous les polynômes R_i .

(Attention : à chaque étape de calcul, il faut veiller à ce que chaque polynôme soit représenté par une liste de paires (coefficient, degré), avec la suite de degré strictement croissante.)

(B) Estimer la complexité de chaque étape. Montrer que la complexité de l'algorithme proposé est $O(mn \log m)$.

(C) Soit Q un polynôme de degré N ayant n coefficients non nuls. On connaît un algorithme de calcul de Q^2 de la complexité $O(N \log N)$. Quelle doit être la valeur de n par rapport à N pour que la méthode de calcul de Q^2 proposé ci-dessus devienne plus avantageuse ?

(D) On admet que, pour les polynômes quelconques de degrés $\leq N$, leur multiplication nécessite $CN \log N$ opérations. On veut calculer le polynôme Q^4 , $\deg Q = N$. Montrer que le calcul selon le schéma

$$(Q \times Q) \times (Q \times Q)$$

nécessite

$$3CN \log N + C_1 N$$

opérations, tandis que le calcul selon le schéma

$$Q \times (Q \times (Q \times Q))$$

nécessite

$$6CN \log N + C_2N$$

opérations.

On peut en conclure que le premier schéma est plus avantageux.

(E) On admet que, pour les polynômes creux ayant m et n termes non nuls, $m \leq n$, leur multiplication nécessite $cmn \log m$ opérations. On veut calculer le polynôme Q^4 où Q possède n termes non nuls. Montrer que le calcul selon le schéma

$$(Q \times Q) \times (Q \times Q)$$

nécessite

$$c(2n^4 + n^2) \log n$$

opérations, tandis que le calcul selon le schéma

$$Q \times (Q \times (Q \times Q))$$

nécessite

$$c(n^4 + n^3 + n^2) \log n$$

opérations.

On en conclut que cette fois-ci c'est le deuxième schéma qui est plus avantageux.

(F) Quel est le meilleur schéma de calcul du polynôme Q^8 , où Q est un polynôme creux. Justifier la réponse.

BRAVO, C'EST TERMINÉ !