

Compléments de Mathématiques et
d'Algorithmique

8 septembre 2004

Durée 3 heures ; tous documents autorisés

**Problème : Calcul des dérivées d'un polynôme
dans un point**

Dans ce problème, quand on parle de la complexité, il s'agit toujours de la *complexité arithmétique*. Cela veut dire que l'on compte les opérations arithmétiques, sans se soucier de la taille et de la précision des nombres avec lesquels ces opérations arithmétiques sont effectuées.

Soit P un polynôme de degré n ,

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n,$$

et soit c un point. Soit B_0 la valeur de P dans le point c , et soit B_1, B_2, \dots, B_n les valeurs des dérivées consécutives de P dans le point c :

$$B_0 = P(c), \quad B_1 = P'(c), \quad B_2 = P''(c), \quad \dots, \quad B_n = P^{(n)}(c),$$

où $P^{(n)}$ est la n -ème dérivée du polynôme P .

(A) Représenter le passage de (a_0, a_1, \dots, a_n) à (B_0, B_1, \dots, B_n) sous forme d'une opération matricielle. Plus exactement, donner les coefficients m_{ij} ($0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq n$) de la matrice M telle que

$$M \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{pmatrix}.$$

(B) Calculer le déterminant de la matrice M . Quelle serait votre conclusion pour la matrice elle-même : est-elle dégénérée ou non ? inversible ou non ?

(C) Proposer un algorithme de calcul de la matrice M avec complexité arithmétique $O(n^2)$.

Indication. Soyez attentifs : il y a n^2 cases dans cette matrice ; mais si on fait le calcul bêtement, il y a jusqu'à $O(n)$ opérations arithmétiques à faire pour calculer une case.

(D) Normalement, pour inverser une matrice de taille $n \times n$, il faut $O(n^3)$ opérations. Proposer, tout de même, un algorithme de passage de (B_0, B_1, \dots, B_n) à (a_0, a_1, \dots, a_n) de complexité arithmétique $O(n^2)$. (On ne vous demande pas d'inverser la matrice mais de résoudre le système en question.)

La suite de cette exercice donne un algorithme de complexité $O(n \log n)$ pour calculer (B_0, B_1, \dots, B_n) à partir de (a_0, a_1, \dots, a_n) .

Rappelons tout d'abord que, selon la formule de Taylor,

$$P(x) = B_0 + B_1(x - c) + B_2 \frac{(x - c)^2}{2!} + B_3 \frac{(x - c)^3}{3!} + \dots + B_n \frac{(x - c)^n}{n!}. \quad (1)$$

Cette formule suggère deux idées : (a) représenter le polynôme P sous forme

$$P(x) = A_0 + A_1x + A_2 \frac{x^2}{2!} + A_3 \frac{x^3}{3!} + \dots + A_n \frac{x^n}{n!}; \quad (2)$$

(b) faire un changement de variables

$$x - c = t, \quad \text{soit} \quad x = c + t.$$

(E) Montrer que la complexité d'obtention de A_0, A_1, \dots, A_n à partir de a_0, a_2, \dots, a_n est $O(n)$.

(F) Réécrire les formules (1) et (2) en utilisant la variable t plutôt que la variable x .

(G) En comparant les coefficients des deux expressions du polynôme $P(c+t)$ obtenues dans la question (F), donner des expressions explicites des coefficients B_0, B_1 et B_2 , puis B_{n-1} et B_n en fonctions des coefficients A_i , $i = 0, 1, \dots, n$ et de paramètre c . (Question facultative : vous pouvez aussi écrire une formule générale pour B_i .)

Convolution. Soit $(p_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $(q_i)_{0 \leq i \leq n}$ deux suites de longueur $n+1$, et soit $(r_k)_{0 \leq k \leq 2n}$ une suite de longueur $2n+1$. On dit que la suite (r_k) et une *convolution* des suites (p_i) et (q_i) si elle se calcule selon la formule

$$r_k = \sum_{i=0}^k p_i q_{k-i} = p_0 q_k + p_1 q_{k-1} + \dots + p_k q_0, \quad k = 0, 1, \dots, 2n. \quad (3)$$

Il faut remarquer que l'indice k prend les valeurs jusqu'à $2n$; quand il nous faut utiliser les p_i ou q_i non-existants (pour i supérieur à n), on les remplace par zéro.

(H) Quel est le rapport de l'opération de convolution avec la multiplication des polynômes ? Quelle est la complexité de calcul de la suite (r_k) en utilisant la définition (3) ? Pouvez-vous proposer une meilleure méthode ? De quelle complexité ?

Il est plus pratique de se représenter une convolution d'une manière graphique, voir la figure 1. On dessine deux lignes de gros "points" ; on les marque par les éléments des deux suites ; puis on montre quels éléments faut-il apparier pour calculer chaque membre de (r_k) .

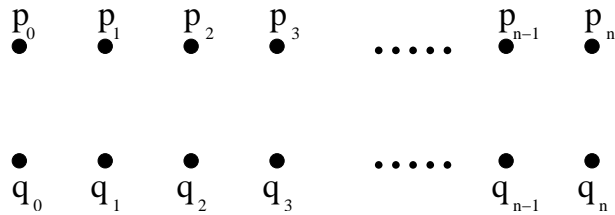


FIG. 1 – Deux suites pour faire une convolution.

(I) Montrer, sur des dessins séparés, comment on apparie les éléments des suites (p_i) et (q_i) pour calculer r_0, r_1, r_2, r_3 , puis r_n .

(J) Montrer que la suite $B_n, B_{n-1}, \dots, B_2, B_1, B_0$ (dans cet ordre !) est une convolution¹ de la suite $A_n, A_{n-1}, \dots, A_2, A_1, A_0$ (aussi dans cet ordre) avec la suite

$$1, c, \frac{c^2}{2!}, \frac{c^3}{3!}, \dots, \frac{c^n}{n!}.$$

Indication. Utiliser votre réponse à la question (G) ainsi que l'image graphique de la question (I).

(K) Faire une conclusion : expliquer comment calculer B_0, B_1, \dots, B_n à partir de a_0, a_1, \dots, a_n avec la complexité $O(n \log n)$.

OUF... C'EST TOUT !

¹Ou plutôt une "moitié" d'une suite "complète" et plus longue de convolution, mais tant mieux pour la complexité !