



3. Chaque ligne suivante est obtenue de la ligne précédente par un décalage d'un cran vers la droite; les éléments sortant à droite réapparaissent à gauche.

En d'autres termes,  $c_{ij} = c_{i+1, j+1}$  où les indices  $i + 1$  et  $j + 1$  sont calculés mod  $n$ . (Les matrices circulaires sont un cas particulier des matrices de Toeplitz qu'on a vues en TD.)

**Exercice 4.** Montrer que la matrice circulaire  $C$  peut s'écrire

$$C = a_0I + a_1U + a_2U^2 + \dots + a_{n-1}U^{n-1}.$$

**Exercice 5.** Soit le polynôme  $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ . Montrer que les valeurs propres de la matrice circulaire  $C$  ci-dessus définie sont égales à  $A(1), A(\omega), A(\omega^2), \dots, A(\omega^{n-1})$ . (On reconnaît la transformée de Fourier du polynôme  $A(x)$ .) [**Indication** : S'inspirer de l'indication à l'exercice 3.]

**Définition.** On dit qu'un graphe est *circulaire* si on peut numéroter ses sommets de telle manière que la matrice d'adjacence du graphe devienne circulaire.

**Exercice 6.** Expliquer le sens géométrique de la propriété de graphe d'être circulaire.

**Définition.** Le *spectre* d'un graphe est le (multi-)ensemble des valeurs propres de sa matrice d'adjacence, comptées avec multiplicités.

**Exercice 7.** Le graphe "escalier de Möbius" est le graphe ayant  $n = 2m$  sommets situés sur un cercle, chaque sommet étant lié avec le sommet précédent, le sommet suivant et le sommet opposé (voir la figure 1). Trouver le spectre de l'escalier de Möbius. Montrer que toutes les valeurs propres sont réelles.

**Exercice 8.** Montrer que le graphe complet  $K_n$  est circulaire. Trouver son spectre. Simplifier les expressions obtenues. Indiquer les multiplicités des valeurs propres multiples.

**Exercice 9.** Le graphe d'octaèdre est montré sur la figure 2. Noméroté ses sommets de telle manière qu'il devienne apparent que ce graphe est circulaire. Trouver le spectre du graphe d'octaèdre.

**Définition.** Soit  $G$  un graphe arbitraire (pas forcément circulaire) ayant  $n$  sommets. Le *prisme du graphe*  $G$  est le graphe ayant  $2n$  sommets qui se construit ainsi : on prend deux exemplaires  $G_1$  et  $G_2$  du graphe  $G$ , et on relie les sommets “correspondants” des deux composantes (voir la figure 3).

**Exercice 10.** Soit  $A$  la matrice d'adjacence du graphe  $G$ . Expliquer comment s'écrit la matrice  $\mathcal{A}$  d'adjacence du graphe prisme du graphe  $G$ .

**Exercice 11.** Montrer que pour chaque valeur propre  $\lambda$  de graphe  $G$ , le graphe prisme du  $G$  possède deux valeurs propres :  $\lambda + 1$  et  $\lambda - 1$ .

[**Indication :** Si  $\vec{x}$  est un vecteur propre de  $A$ , alors  $\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{x} \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \vec{x} \\ -\vec{x} \end{pmatrix}$  sont des vecteurs propres de  $\mathcal{A}$  (voir l'exercice précédent).]

**Exercice 12.** Trouver le spectre du graphe “segment” (l'arbre ayant deux sommets et une arête). Trouver le spectre du carré, puis celui du cube.

**Définition.** Un graphe est dit *régulier* de degré  $d$  si tous ses sommets sont du même degré  $d$ .

**Exercice 13.** Montrer que si le spectre d'un graphe régulier de degré  $d$  est  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , alors les valeurs propres de la matrice des conductances  $T$  de ce graphe sont  $d - \lambda_1, d - \lambda_2, \dots, d - \lambda_n$ .

**Exercice 14.** Trouver les valeurs propres des matrices des conductances des graphes du cube et de l'octaèdre.

On admet sans preuve que le nombre d'arbres recouvrants d'un graphe est égal au produit de toutes les valeurs propres non nulles de sa matrice des conductances, divisé par le nombre de sommets  $n$ .

**Exercice 15.** Calculer le nombre d'arbres recouvrants de l'octaèdre et du cube. Expliquer pourquoi avez-vous obtenu le même résultat.

BRAVO, C'EST TERMINÉ !

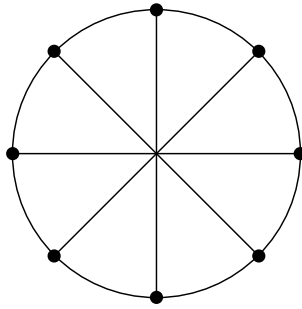


FIG. 1 – Escalier de Möbius. (Il n'y a pas de sommet au centre!)

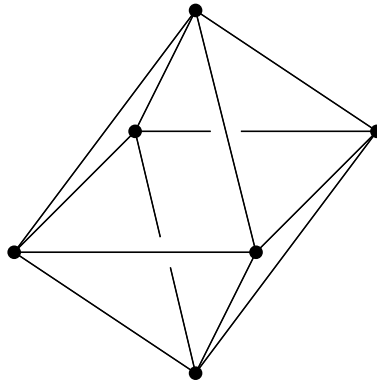


FIG. 2 – Octaèdre.

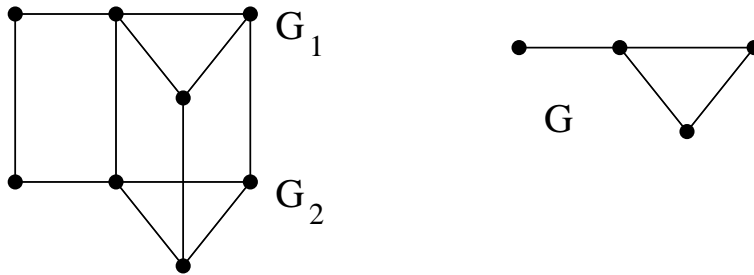


FIG. 3 – Le prisme de graphe  $G$ .