

Compléments de Mathématiques et d'Algorithmique

Responsable : Alexandre Zvonkine ; tous documents autorisés
15 juin 2005, 14h00 – 17h00

Barème envisagé : $(1 + 1 + 1) + (2 + 2 + 3) + (1 + 2 + 3) + (1 + 3 + 4)$

Problème : Inversion des matrices de Vandermonde

Rappel. La matrice de Vandermonde est une matrice $n \times n$ de la forme

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

où $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ sont des nombres réels, ou des nombres complexes, ou des éléments d'un corps fini (par exemple des restes modulo un p premier).

L'objectif du problème est de trouver des formules qui donnent, sous forme explicite, la matrice inverse V^{-1} .

Question 1. Soit un vecteur-colonne avec les éléments $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$. Montrer que si on multiplie ce vecteur par la matrice de Vandermonde, on obtient un vecteur-colonne dont les éléments sont les valeurs du polynôme

$$P = P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$$

dans les points $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$.

Question 2. Que fait la matrice inverse V^{-1} si elle existe ?

Question 3. Montrer que si tous les points $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ sont distincts, alors la matrice inverse V^{-1} existe.

[Indication : Quelle est la valeur du déterminant $\det V$?]

Conclusion. Quels que soient les points distincts $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, et quelles que soient les valeurs $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$, un polynôme P de degré $n-1$ tel que $y_0 = P(x_0), y_1 = P(x_1), y_2 = P(x_2), \dots, y_{n-1} = P(x_{n-1})$ existe et est unique.

Par conséquent, pour trouver la matrice V^{-1} il nous faut faire deux choses :

(A) trouver les coefficients a_0, a_1, \dots, a_{n-1} du polynôme P en fonction des points x_0, x_1, \dots, x_{n-1} et des valeurs y_0, y_1, \dots, y_{n-1} ;

(B) exprimer la solution ainsi obtenue sous forme matricielle.

Pour résoudre le problème (A), il existe des formules d'interpolation, dont notamment la formule d'*interpolation de Lagrange*.

Notation. Soit une formule F qui implique les variables t_1, t_2, \dots, t_k à l'exception de la seule variable t_r . On exprimera ce fait en mettant un chapeau sur t_r :

$$F(t_1, t_2, \dots, \widehat{t_r}, \dots, t_k).$$

Question 4. Soit un polynôme

$$P_j = P_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(\widehat{x-x_j})\dots(x-x_{n-1})}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(\widehat{x_j-x_j})\dots(x_j-x_{n-1})}.$$

(a) Il y a plusieurs lettres dans cette dernière expression : x, x_0, x_1, \dots ; P_j est-il véritablement un polynôme en x ?

(b) Quel est le degré de P_j ?

(c) Calculer les valeurs de $P_j(x)$ dans les points $x_0, x_1, \dots, x_j, \dots, x_{n-1}$.

Question 5. Soit $P = P(x)$ le polynôme

$$P(x) = y_0P_0(x) + y_1P_1(x) + y_2P_2(x) + \dots + y_{n-1}P_{n-1}(x). \quad (1)$$

Calculer les valeurs du polynôme P dans les points $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$.

Conclusion. La formule (1) donne la réponse à la question posée dans le problème (A).

Question 6. (Proposition principale) Soit u_{ij} l'élément de la matrice V^{-1} qui se trouve dans la case (i, j) (ligne i , colonne j). Démontrer la propriété suivante :

$$u_{ij} \text{ est égal au coefficient devant } x^i \text{ dans le polynôme } P_j(x).$$

[Indication : Utiliser la formule (1).]

Pour trouver une formule explicite pour le coefficient u_{ij} , les *formules de Viète* nous seront utiles.

Définition. Soit k variables t_1, t_2, \dots, t_k . Les *fonctions symétriques élémentaires* des variables t_1, t_2, \dots, t_k sont les fonctions e_1, e_2, \dots, e_k définies par la formule

$$e_p(t_1, t_2, \dots, t_k) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq k} t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_p}.$$

On pose aussi $e_0(t_1, t_2, \dots, t_k) = 1$.

Exemple : Pour $k = 3$ on obtient

$$\begin{aligned} e_0 &= 1; \\ e_1 &= t_1 + t_2 + t_3; \\ e_2 &= t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3; \\ e_3 &= t_1 t_2 t_3. \end{aligned}$$

Question 7. Écrire les fonctions symétriques élémentaires pour $k = 4$.

Formules de Viète. Soit $Q = Q(t)$ un polynôme de degré k ayant le coefficient principal $c_k = 1$ et dont les racines sont t_1, t_2, \dots, t_k :

$$Q(t) = t^k + c_{k-1}t^{k-1} + \dots + c_2t^2 + c_1t + c_0 = (t - t_1)(t - t_2) \dots (t - t_k).$$

Alors les coefficients de Q s'expriment en fonction de ses racines par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} c_k &= e_0(t_1, \dots, t_k); \\ c_{k-1} &= -e_1(t_1, \dots, t_k); \\ c_{k-2} &= e_2(t_1, \dots, t_k); \\ \dots &= \dots \\ c_q &= \boxed{\text{une formule générale}}. \end{aligned}$$

Question 8. (a) Écrire explicitement la “formule générale” encadrée qui a été omise ci-dessus. (Dans cette question, on ne demande pas de preuves.)

(b) Vérifier les formules de Viète pour $k = 3$ et $k = 4$.

Question 9. (La formule principale) Montrer que l’élément u_{ij} de la matrice V^{-1} s’exprime par la formule suivante :

$$u_{ij} = \frac{(-1)^{(n-1)-i} e_{(n-1)-i}(x_0, x_1, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_{n-1})}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1}) \dots (x_j - x_{n-1})}. \quad (2)$$

Question 10. En utilisant la formule (2), écrire explicitement l’élément u_{ij} pour $i = 2, j = 3, n = 5$.

Question 11. Écrire explicitement la matrice inverse V^{-1} de la matrice de Vandermonde V pour $n = 3$. En multipliant les deux matrices, vérifier que ce qu’on obtient par la formule (2) est en effet la matrice inverse.

Remarque : N’oubliez pas que les lignes et les colonnes sont numérotées non pas de 1 à n mais de 0 à $n - 1$.

Question 12. Dans la transformée de Fourier rapide on utilise le fait que, pour $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ étant la suite des racines n -ème de l’unité 1, $\omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$, $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, la matrice V^{-1} est elle-même une matrice de Vandermonde (divisée par n) pour la suite des mêmes racines de l’unité prises dans l’ordre opposé. Vérifier que pour $n = 3$ et $n = 4$ la formule (2) ci-dessus donne le même résultat.

FIN DE L’ÉNONCÉ