

Théorème matriciel de Kirchhoff

Notations. Soit G un graphe sans boucles ayant n sommets v_1, v_2, \dots, v_n . On dénote R_{ij} la *résistance* de l'arête (v_i, v_j) , et $c_{ij} = 1/R_{ij}$, la *conductance* correspondante (quand il n'y a pas d'arête, $R_{ij} = \infty$ et $c_{ij} = 0$). Soit V_i le *potentiel de la tension* au sommet v_i , et soit I_{ij} l'*intensité du courant* de v_i à v_j (on prend par convention $I_{ij} = -I_{ji}$). On peut énoncer

La loi d'Ohm :

$$I_{ij} = \frac{V_i - V_j}{R_{ij}} = c_{ij} (V_i - V_j).$$

Supposons qu'un courant I entre dans le sommet v_k (qui est la "source") et sort du sommet v_l (qui est le "décharge"). Notre objectif est de calculer la résistance du graphe G tout entier entre les sommets v_k et v_l , ce qui est équivalent à calculer la différence des potentiels $V_k - V_l$.

Les lois de Kirchhoff. Pour tout $i \neq k, l$ on a

$$\sum_{j \neq i} I_{ij} = \sum_{j \neq i} c_{ij} (V_i - V_j) = 0,$$

tandis que pour $i = k, l$ on a

$$\sum_{j \neq k} I_{kj} = \sum_{j \neq k} c_{kj} (V_k - V_j) = I, \quad \sum_{j \neq l} I_{lj} = \sum_{j \neq l} c_{lj} (V_l - V_j) = -I.$$

Remarque. Les signes sont corrects : le conducteur par lequel le courant arrive au sommet v_k n'est pas une arête du graphe. Quand on prend la somme des *courants sortants* sur les arêtes incidentes au sommet v_k , on obtient I . La situation est symétrique au sommet v_l .

Ces équations forment un système linéaire avec n inconnus V_1, \dots, V_n ; la matrice de ce système, que je dénote T , possède comme éléments

$$t_{ij} = -c_{ij} \text{ pour } i \neq j \text{ et } t_{ii} = \sum_{j \neq i} c_{ij}.$$

Soit \vec{V} et \vec{I} deux vecteurs définis comme suit :

$$\vec{V}^T = (V_1, \dots, V_n), \quad \vec{I}^T = (0, \dots, I, \dots, -I, \dots, 0);$$

ici l'indice supérieur T indique la transposition, et les éléments non nuls dans le vecteur \vec{I} se trouvent en positions k et l . Alors le système de Kirchoff se réécrit ainsi :

$$T \cdot \vec{V} = \vec{I}.$$

La matrice T est dégénérée : la somme des éléments de chaque ligne est égale à zéro. C'est normal : les potentiels n'ont pas de leur propre sens physique mais seules leurs différences ont un sens. Mettons $V_l = 0$ et soit T^{ll} la matrice T avec la ligne et la colonne numéro l rayées, \vec{V}^l et \vec{I}^l les vecteurs correspondants privés de ses composantes numéro l (l'élément $-I$ disparaît donc de \vec{I} et le seul élément non nul de \vec{I}^l se trouve en position k et est égal à I). Alors notre système se réécrit

$$T^{ll} \cdot \vec{V}^l = \vec{I}^l.$$

On s'intéresse à la seule composante V_k du vecteur \vec{V} . On peut utiliser la règle de Cramer et écrire

$$V_k = I \times \frac{\det T^{kk,ll}}{\det T^{ll}},$$

où $T^{kk,ll}$ est la matrice T avec les lignes et les colonnes numéro k et l rayées.

Nous avons démontré la proposition suivante :

Le théorème matriciel de Kirchoff (1847). La résistance du graphe G entre les sommets v_k et v_l est égale à

$$R = \frac{\det T^{kk,ll}}{\det T^{ll}}.$$

Remarque. Le résultat ne doit pas changer si on échange k et l ; par conséquent $\det T^{kk} = \det T^{ll}$. En fait, tous les cofacteurs de la matrice T sont égaux.

Exercice. Prendre un petit graphe, de préférence asymétrique, et calculer sa résistance.

Supposons maintenant que les résistances de toutes les arêtes sont égales à 1. Alors

$$T = -A + \text{diag}(\text{deg}(v_1), \dots, \text{deg}(v_n)),$$

où A est la *matrice d'adjacence* du graphe.

Matrix tree theorem. Tous les cofacteurs de la matrice T sont égaux. Le nombre ainsi obtenu est le nombre d'arbres recouvrants du graphe G . (Remarque : le graphe peut avoir des arêtes parallèles.)

La seule preuve que je connais n'est pas du tout simple. On introduit la *matrice d'incidence* E . C'est une matrice rectangulaire, de taille $n \times m$ où m est le nombre d'arêtes du graphe : les lignes de E correspondent aux sommets, les colonnes aux arêtes. Dans chaque colonne il y a exactement deux éléments non nuls; ils correspondent aux extrémités de l'arête et sont égaux à 1 et à -1 (arbitrairement). On remarque que $E \cdot E^T = T$. On utilise ensuite la formule de Binet–Cauchy : $\det(AB)$ est égal à la somme des produits de déterminants des sous-matrices carrées de A et de B formées de mêmes lignes/colonnes. Enfin on démontre que le déterminant d'une sous-matrice carrée de E (avec une ligne enlevée!) est non nul, et est égal à ± 1 , si et seulement si cette sous-matrice correspond à un arbre.

Exercice. Prendre un petit graphe, par exemple le carré avec une diagonale, et vérifier le théorème en calculant le déterminant et en énumérant manuellement les arbres recouvrants. (Pour le carré avec une diagonale la réponse est 8.)

La formule de Cayley. Le nombre d'arbres ayant n sommets étiquetés est n^{n-2} . (Preuve : le calcul du déterminant correspondant au graphe complet K_n .)

Exercice. Vérifier la formule de Cayley pour $n = 3, 4, 5$. (Pour $n = 3$ il existe un seul arbre; pour $n = 4$ il y en a 2, pour $n = 5$ il y en a 3. Il reste à voir combien il y a de manières de les étiqueter.)

Proposition. 1. Si le graphe G contient l'arête (v_k, v_l) , alors sa résistance entre v_k et v_l est égale au nombre des arbres recouvrants de G contenant cette arête divisé par le nombre total d'arbres recouvrants.

2. Si le graphe G ne contient pas l'arête (v_k, v_l) on peut tout de même utiliser la même propriété : on ajoute au graphe cette arête, obtenant ainsi un graphe G' ; puis on considère le graphe G' comme un branchement parallèle de l'arête (v_k, v_l) et du graphe G .

Exercice. Appliquer la proposition précédente à un simple graphe (par exemple à celui dont la résistance on a déjà calculé précédemment).