

Géométrie Algorithmique

Devoir surveillé

Durée 2 heures; Barème total 24 points: tous documents autorisés

1 Barycentre sur la sphère

L'objectif de ce problème est d'introduire la notion de barycentre sur la sphère. On commence par réexaminer cette notion dans l'espace affine.

Définition (Barycentre affine) Soit un espace affine \mathbb{E}^d de dimension d représenté comme l'hyperplan $x_{d+1} = 1$ dans l'espace \mathbb{R}^{d+1} . Soit n points matériels $(X_1, m_1), \dots, (X_n, m_n)$, $X_1, \dots, X_n \in \mathbb{E}^d$. On appelle leur *barycentre* un point matériel (M, m) tel que $M \in \mathbb{E}^d$ et

$$\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OX_i} = m \overrightarrow{OM},$$

où O est l'origine dans \mathbb{R}^{d+1} .

Exercice 1.1 (/1) Montrer que

$$m = m_1 + \dots + m_n.$$

Exercice 1.2 (Propriété de groupement) (/2) Montrer que si on remplace un sous-ensemble de points matériels par leur barycentre, le barycentre de l'ensemble tout entier ne changera pas.

Exercice 1.3 (Invariance affine) (/3) Soit $f : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ une transformation affine telle que $f(\mathbb{E}^d) = \mathbb{E}^d$. Montrer que si on remplace tous les points X_i , $i = 1, \dots, n$ par les $Y_i = f(X_i)$ correspondants, sans changer leurs masses, alors M sera remplacé par $N = f(M)$.

Définition (Barycentre sur la sphère) Soit une sphère \mathbb{S}^d de dimension d représentée par l'équation

$$x_1^2 + \dots + x_d^2 + x_{d+1}^2 = 1$$

dans l'espace \mathbb{R}^{d+1} . Soit n points matériels $(X_1, m_1), \dots, (X_n, m_n)$, où $X_1, \dots, X_n \in \mathbb{S}^d$. On appelle leur *barycentre* un point matériel (M, m) tel que $M \in \mathbb{S}^d$ et

$$\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OX_i} = m \overrightarrow{OM},$$

où O est l'origine dans \mathbb{R}^{d+1} .

Remarque Comme on le verra plus tard, le barycentre sur la sphère n'est pas toujours défini.

Exercice 1.4 (Propriété de groupement) (/1) Montrer que si on remplace un sous-ensemble de points matériels sur la sphère par leur barycentre, le barycentre de l'ensemble tout entier ne changera pas.

Exercice 1.5 (Invariance par rapport aux rotations) (/2) Soit $f : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ un opérateur orthogonal. Montrer que si on remplace tous les points X_i , $i = 1, \dots, n$ par les $Y_i = f(X_i)$ correspondants, sans changer leurs masses, alors M sera remplacé par $N = f(M)$.

Exercice 1.6 (/3) Soit (X_1, m_1) , (X_2, m_2) deux points matériels sur la sphère. Soit $OAPB$ le parallélogramme dont les sommets A, B, P s'obtiennent comme $\overrightarrow{OA} = m_1 \overrightarrow{OX_1}$, $\overrightarrow{OB} = m_2 \overrightarrow{OX_2}$, $\overrightarrow{OP} = m \overrightarrow{OM}$. Soit enfin $\alpha_1 = \angle AOP$, $\alpha_2 = \angle BOP$.

(1) Montrer que

$$m = m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2.$$

(2) Montrer la règle de levier :

$$m_1 \sin \alpha_1 = m_2 \sin \alpha_2.$$

[**Indication.** Projeter les points A et B sur la diagonale OP .]

Remarque On voit que la masse m qu'il faut mettre dans le barycentre, dans le cas de la sphère est toujours inférieure à la somme des masses (à l'exception du cas des points qui coïncident : dans ce dernier cas on a une égalité). Si $m_1 = m_2$ et les deux points sont diamétralement opposés, on obtient $m = 0$, et le barycentre "disparaît".

Exercice 1.7 (/2) Soit ABC un triangle sur la sphère de dimension 2, ayant tous les angles égaux à 90° . Soit M le points d'intersection de ses médianes. Le point M divise chaque médiane en deux arcs. Trouver ces arcs.

2 Arrangement d'hyperplans

Considérons n hyperplans en position générale dans l'espace affine de dimension d . Ils subdivisent l'espace en certain nombre de "régions" (bornées et non bornées). L'objectif de ce problème est de calculer le nombre de ces régions.

Définition (Droites en position générale) On dit que n droites sur le plan sont *en position générale*, si

- (a) il n'y a pas deux droites parallèles (ou coïncidentes);
- (b) il n'y a pas trois droites qui passent par le même point.

Exercice 2.1 (/1) En combien de régions coupent le plan : 1 droite; 2 droites; 3 droites; 4 droites ?

Exercice 2.2 (/3) On ajoute une $(n + 1)$ -ième droite à un arrangement de n droites, de telle sorte que le nouvel arrangement est aussi en position générale. Combient de domaines a-t-on ajouté ? **[Indication.** Autant qu'il y a de segments (finis ou infinis) sur cette nouvelle droite, obtenus par son intersection avec l'arrangement initial.]

En utilisant une récurrence sur n , montrer que le nombre de régions en dimension 2 est égal à

$$1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}.$$

Définition (Plans en position générale) On dit que n plans dans l'espace de dimension 3 sont *en position générale*, si

- (a) il n'y a pas deux plans parallèles (ou coïncidents);

(b) il n'y a pas trois plans dont les droites d'intersection sont parallèles dans l'espace;

(c) il n'y a pas quatre plans qui passent par le même point.

Exercice 2.3 (/2) Montrer que $n + 1$ plans dans l'espace de dimension 3 sont en position générale si et seulement si

(a) chaque plan s'intersecte avec tous les autres;

(b) cette intersection est un arrangement de n droites en position générale.

Exercice 2.4 (Position générale en dimension d) (/1) Donner une définition inductive de la notion d'arrangement d'hyperplans en position générale pour une dimension d quelconque.

Exercice 2.5 (/3) Montrer que n hyperplans en position générale dans l'espace de dimension d subdivisent cet espace en

$$\sum_{k=0}^d \binom{n}{k}$$

régions. [Pour $n < k$, ainsi que pour $k < 0$ on met par définition $\binom{n}{k} = 0$.]