

Géométrie Algorithmique

Devoir surveillé

Durée 3 heures; tous documents autorisés.

L'objectif du problème est de trouver un algorithme de placement d'un polygone (ou d'un polyèdre) à l'intérieur d'un autre polygone (polyèdre) en utilisant une translation. La Figure 1 montre un exemple d'un tel placement.

On ne prêtera pas attention aux subtilités concernant la frontière des polyèdres : chaque polyèdre peut être considéré comme ouvert ou comme fermé selon la convenance.

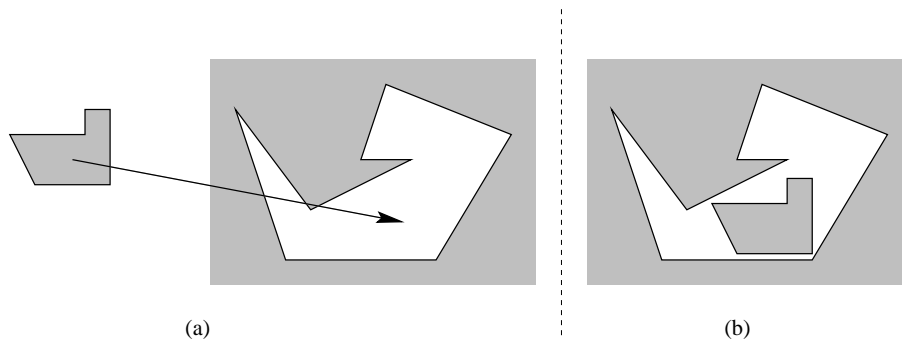


Figure 1: Placement d'un polygone dans un autre polygone : (a) une translation recherchée; (b) le résultat de la translation.

1 Somme de Minkowski

Définition (Somme de Minkowski) Soient X et Y deux parties de l'espace euclidien \mathbb{E}^d de dimension d . On définit leur *somme de Minkowski* $X \oplus Y$ comme l'ensemble

$$X \oplus Y = \{z \mid \exists x \in X, \exists y \in Y \text{ tels que } x + y = z\}.$$

Remarque : si Y consiste d'un seul point y , alors $X \oplus y$ est la translation de X en vecteur y .

Exercice 1.1 Montrer que la somme de Minkowski est commutative et associative.

Exercice 1.2 Montrer la distributivité de la somme de Minkowski par rapport à la réunion : si $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ et $Y = \bigcup_{j \in J} Y_j$, alors

$$X \oplus Y = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (X_i \oplus Y_j).$$

Montrer que pour l'intersection la propriété de distributivité est fausse.

Exercice 1.3 Montrer que si $X_1 \subseteq X_2$ et $Y_1 \subseteq Y_2$, alors $X_1 \oplus Y_1 \subseteq X_2 \oplus Y_2$.

Exercice 1.4 Montrer que si X et Y sont convexes, alors $X \oplus Y$ est aussi convexe.

Exercice 1.5 Montrer que si X' et Y' sont des translations parallèles de X et Y respectivement, alors $X' \oplus Y'$ est une translation parallèle de $X \oplus Y$.

2 La somme de Minkowski de polygones

Exercice 2.1 Soient X et Y deux polygones convexes ayant m et n sommets respectivement. Montrer que $X \oplus Y$ est aussi un polygone convexe qui se construit de la manière suivante. On oriente les côtés de X et de Y en sens trigonométrique. Si X et Y n'ont pas de côtés parallèles ayant la même direction, alors le nombre de côtés de $X \oplus Y$ est $m + n$: à chaque côté de X ou de Y il correspond un côté de $X \oplus Y$ de la même longueur et de la même direction. Si deux côtés de X et Y sont parallèles et ont la même direction, alors il leur correspond un côté de $X \oplus Y$ de la même direction et dont la longueur est la somme des longueurs de ces deux côtés. (On peut remarquer que dans tous les cas le périmètre de $X \oplus Y$ est égal à la somme des périmètres de X et Y .)

Exercice 2.2 (a) Montrer que la somme de Minkowski de deux segments est soit un parallélogramme, soit un segment. (b) Représenter l'hexagone régulier comme une somme de Minkowski de trois segments, et aussi comme une somme de Minkowski de deux triangles.

Exercice 2.3 Montrer que la somme de Minkowski $X \oplus Y$ de deux polygones convexes X et Y est l'enveloppe convexe des points $A_i + B_j$, où A_1, \dots, A_m et B_1, \dots, B_n sont les sommets de X et de Y respectivement.

L'exercice précédent suggère l'algorithme suivant de calcul de la somme de Minkowski de deux polygones convexes :

- calculer mn points $A_i + B_j$, où A_i et B_j sont les sommets des deux polygones;
- calculer, avec la complexité $O(mn \log(mn))$, leur enveloppe convexe.

Or cet algorithme est loin d'être optimal.

Exercice 2.4 Pour deux polygones convexes X et Y ayant m et n sommets respectivement, proposer un algorithme de calcul de $X \oplus Y$ de complexité $O(m+n)$. [**Indication** : Utiliser un parcours circulaire des sommets et des arêtes des polygones.]

3 Placement

Definition (Placement) Soit P et R deux sous-ensembles de \mathbb{E}^d ; P est l'ensemble que l'on veut *placer*, tandis que R est considéré comme un *obstacle*. Un vecteur $x \in \mathbb{E}^d$ est un *placement admissible* de P si la translation $P \oplus x$ et l'obstacle R sont disjoints. L'ensemble de tous les placements admissibles de P s'appelle *espace libre*, et est dénotée $L = L(P, R)$.

Exercice 3.1 (La propriété principale) Montrer que

$$\bar{L} = R \oplus (-P),$$

où \bar{L} est le complément de L , et $-P = \{-p \mid p \in P\}$.

Nous avons vu dans l'Exercice 2.4 que dans certains cas (comme, par exemple, dans le cas des polygones convexes) le calcul de la somme de Minkowski peut être particulièrement efficace. Cela suggère une idée de décomposer un ensemble quelconque en une union d'ensembles "plus convenables".

Exercice 3.2 Montrer que si $P = \bigcup_{i \in I} P_i$ et $R = \bigcup_{j \in J} R_j$, alors

$$L(P, R) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} L(P_i, R_j).$$

[**Indication** : Utiliser l'Exercice 1.2.]

Supposons que l'obstacle R est le complément d'un polytope convexe Q . Alors placer P sans qu'il ne touche l'obstacle R est la même chose que placer P à l'intérieur de Q .

Exercice 3.3 Montrer que si Q est un polytope convexe et P un polyèdre quelconque, le problème de placement de P à l'intérieur de Q est équivalent au problème de placement du polytope convexe $\text{conv}(P)$ à l'intérieur de Q .

Exercice 3.4 Soit P un polytope convexe avec les sommets A_1, \dots, A_m , qu'il faut placer à l'intérieur du polytope convexe Q . Montrer que l'espace libre pour ce placement se calcule comme

$$L = \bigcap_{i=1}^m (Q \oplus (-A_i)).$$

[**Indication** : Utiliser l'Exercice 3.2.]

4 Placement d'un polygone convexe dans un autre

Admettons que l'intersection de N demi-plans peut être calculée en temps $O(N \log N)$. Supposons que le polygone convexe Q possède n sommets.

Exercice 4.1 En utilisant le résultat de l'Exercice 3.4 proposer un algorithme de complexité $O(mn \log(mn))$ pour calculer le placement d'un polygone convexe P dans le polygone convexe Q .

Exercice 4.2 Proposer, pour le même problème, un algorithme de complexité $O(m + n \log n)$. [**Indication** : On peut regrouper les demi-plans de frontière parallèle à chaque arête du polygone Q .]

Définition (Demi-plan redondant) Dans une suite H_1, \dots, H_n de n demi-plans ordonnés par l'ordre des arêtes du polygone convexe Q , un demi-plan H_j est *redondant* s'il existe deux demi-plans H_i et H_k tels que $i < j < k$ et $H_i \cap H_k \subset H_j$. Dans ce cas-là le triplet (i, j, k) est appelé *triplet redondant*. (Voir la Figure 2 où les demi-plans sont indiqués par des petites flèches.)

Exercice 4.3 Comment vérifier, en temps constant, qu'un triplet donné (i, j, k) est redondant ?

Exercice 4.4 Montrer que s'il existe un triplet redondant, alors il existe un triplet redondant de type $(i - 1, i, i + 1)$. [**Indication** : L'idée de la preuve est montrée sur la Figure 3 : si un triplet (i, j, k) est redondant, et si les indices i et j ne sont pas consécutifs, alors pour un p tel que $i < p < j$ un des deux triplets (i, p, j) et (p, j, k) est redondant.]

Exercice 4.5 En utilisant le résultat de l'Exercice 4.4, proposer un algorithme de complexité $O(m + n)$ pour calculer le placement d'un polygone convexe P dans un polygone convexe Q .

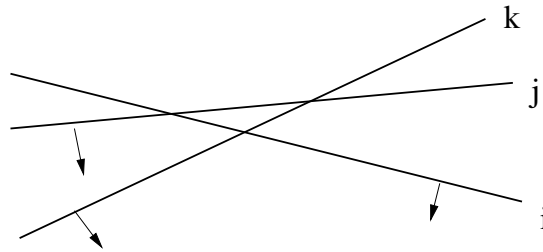


Figure 2: Le demi-plan H_j est redondant.

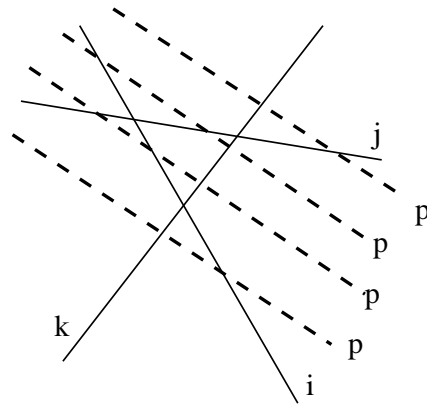


Figure 3: Quatre possibilités pour tracer la ligne p ; dans tous les cas soit le triplet (i, p, j) , soit (p, j, k) est redondant.