

Rendre les copies le 26 avril 2004. Les descriptions d'algorithmes doivent être informelles mais compréhensibles et accompagnées d'estimation de complexité.

Cartes planaires formées de segments

Définition. Une *carte planaire* est un graphe dessiné sur le plan de telle manière que ses arêtes ne se coupent pas. Le plan du dessin est ainsi découpé en régions, qui s'appellent *faces*. La face extérieure est aussi considérée comme un élément de l'ensemble des faces.

Question 1. Quel est le nombre maximum d'arêtes et de faces d'une carte planaire à n sommets qui n'a pas de boucles ni d'arêtes multiples? [Une boucle est une arête qui relie un sommet avec lui-même. Des arêtes sont dites multiples si elles relient le même couple de sommets.]

Indication : Utiliser la formule d'Euler : pour toute carte planaire

$$S - A + F = 2,$$

où S , A et F sont les nombres de sommets, d'arêtes et de faces de la carte, respectivement.

Conclusion de la Question 1 : le nombre d'arêtes et de faces d'une carte planaire à n sommets est $O(n)$.

Question 2. Soit une carte planaire à n sommets, avec les arêtes représentées par des segments de droites (voir la Figure 1). Pour chaque sommet, à part ses coordonnées euclidiennes, une liste de sommets adjacents est donnée. Comment vérifier que les données ne sont pas contradictoires? [Pour cette question, seules les références sur des algorithmes connus suffiront.]

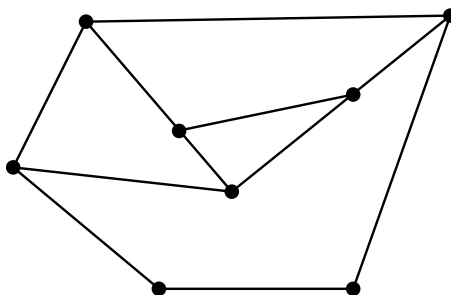


FIG. 1 – Une carte réalisée par des segments de droites

Question 3. Pour la représentation de la Question 2, récupérer la liste des faces (sous forme habituelle de listes circulaires de sommets).

Question 4. Une carte est représentée cette fois sous la forme utilisée pour représenter les polytopes : une liste de sommets ; une liste d'arêtes ; une liste de faces ; et les liens d'incidence entre sommets et arêtes et entre arêtes et faces. Comment passer des structures des Questions 2 et 3 à celle-ci, et inversement ?

Question 5. Localiser un point dans une carte revient à déterminer dans quelle face le point se trouve. Décrire un algorithme de localisation en se basant sur la notion d'index d'un point par rapport à une ligne fermée.

Question 6. Décrire un algorithme de cloisonnement d'une carte par lignes verticales. Cet algorithme doit préparer une structure de données permettant de répondre à la Question 8.

Pour simplifier la construction, on supposera que la carte n'a pas d'arêtes verticales. Un algorithme utilisant en tant qu'une entrée les structures des questions précédentes sera mieux apprécié qu'un algorithme "ad hoc".

Question 7. Montrer sur un exemple que le cloisonnement d'une carte à n sommets peut subdiviser le plan en $O(n^2)$ régions. Quelles conséquences cela entraîne pour l'algorithme de la Question 6 ?

Question 8. En utilisant la structure de données construite dans la Question 6, décrire un algorithme de localisation qui répond à une requête de localisation en temps $O(\log n)$.

Remarque. Contrairement à nos méthodes un peu naïves, la méthode de Sarnak et Tarjan (1986) construit, en temps $O(n \log n)$, une structure de données de taille $O(n)$ permettant de répondre à une requête de localisation avec la même efficacité $O(\log n)$. Cette méthode utilise la même idée géométrique du cloisonnement mais une structure de données plus astucieuse de "dictionnaire persistant". Si vous avez des idées là-dessus, ne serait-ce que concernant les requêtes auxquelles doit pouvoir répondre le dictionnaire persistant, n'hésitez pas à les présenter.