

Algorithmique Géométrique

04 mai 2006, 08h30 – 11h30 (3 heures)

Responsable : Alexandre Zvonkine. Tous documents autorisés
Barème envisagé : le barème total du problème est sur 24 points

Problème : Section des polygones et des polytopes

Soit un polygone convexe P ayant n sommets A_0, A_1, \dots, A_{n-1} , et une ligne droite l représentée par son équation $ax + by + c = 0$. Notre tâche consiste à trouver deux polygones P_1 et P_2 obtenus par l'intersection de P avec l . On propose l'algorithme suivant :

1. Trouver deux sommets A_i et A_j qui se trouvent de deux côtés différents de l .
2. Sur la chaîne $A_i \rightarrow \dots \rightarrow A_j$ ainsi que sur la chaîne $A_j \rightarrow \dots \rightarrow A_i$ trouver des segments $A_p A_{p+1}$ et $A_q A_{q+1}$ respectivement (indices p et q sont comptés "modulo n ") qui s'intersectent avec l . Soit M et N les points d'intersection.
3. Sortir comme résultat les polygones obtenus : $P_1 = MA_{p+1} \dots A_q N$ et $P_2 = NA_{q+1} \dots A_p M$.

(Il est conseillé de faire un dessin.)

Exercice 1. Montrer que si le polygone initial P est représenté sous forme d'une liste circulaire, l'opération 3 peut être effectuée en complexité $O(1)$.

Exercice 2. On aimerait, pour faire l'opération 2, procéder par une recherche dichotomique : cela permettrait de parvenir au résultat en complexité... [*en quelle complexité ? justifier votre réponse*]. Mais attention ! La structure de liste ne permet pas la recherche dichotomique [*expliquer très brièvement pourquoi*]. Proposer une structure de données qui permettrait d'effectuer une dichotomie, sans pour autant enfreindre la complexité constante de l'exercice précédent.

Une méthode directe pour effectuer l'opération 1 nécessiterait un parcours de tous les sommets et aurait ainsi une complexité linéaire. Les exercices 3–5 proposent une méthode plus efficace pour ce problème-là.

Exercice 3. (a) Montrer que si la valeur de la fonction $ax + by + c$ est positive (négative) dans tous les sommets d'un triangle ABC , alors elle est aussi positive (négative) dans tous les points à l'intérieur du triangle.

(b) Soit $PABQ$ un "triangle" non borné (hachuré sur la figure 1). Montrer que si la valeur de la fonction $ax + by + c$ dans les points A et B est positive et dans le point R , négative, alors cette fonction est positive partout dans la région non bornée $PABQ$.

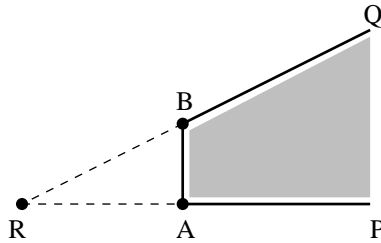


FIG. 1 – "Triangle" infini $PABQ$ (hachuré).

Convention. Nous travaillons avec des polygones ayant plusieurs côtés. Il est difficile de les dessiner d'une manière réaliste. C'est pourquoi, sur la figure 2, notre polygone P est représenté comme une sorte de cercle. Il faut penser que chaque arc du cercle n'est pas véritablement un arc mais une longue suite de sommets et d'arêtes du polygone.

Exercice 4. Choisissons 5 sommets du polygone : A, B, C, D, E (voir la figure 2). Si parmi ces 5 sommets il y a un avec $ax + by + c > 0$ et un autre avec $ax + by + c < 0$, notre objectif est déjà atteint et nous pouvons nous arrêter. Supposons donc que le signe de $ax + by + c$ dans tous les 5 sommets soit le même ; pour fixer les idées, supposons que ce signe soit toujours "plus". Dessinons alors l'étoile montrée sur la figure. Montrer que les trois cas suivants sont possibles.

(a) La valeur de $ax + by + c$ dans les points F, G, H, I, J est toujours positive. Montrer que dans ce cas-là la droite $ax + by + c = 0$ ne s'intersecte pas avec le polygone P et la recherche peut être arrêtée.

(b) La valeur de $ax + by + c$ est négative dans un seul parmi les 5 points F, G, H, I, J .

(c) La valeur de $ax + by + c$ est négative dans deux des 5 points, et alors ces points sont voisins. Par exemple, le signe peut être négatif dans F et G ,

mais ne peut pas l'être dans F et H . Expliquer du même coup pourquoi le signe ne peut pas être négatif dans les points F, G, H .

Sur quels "arcs" du polygone faut-il encore chercher des sommets avec la valeur de $ax + by + c$ négative dans les cas (b) et (c) ?

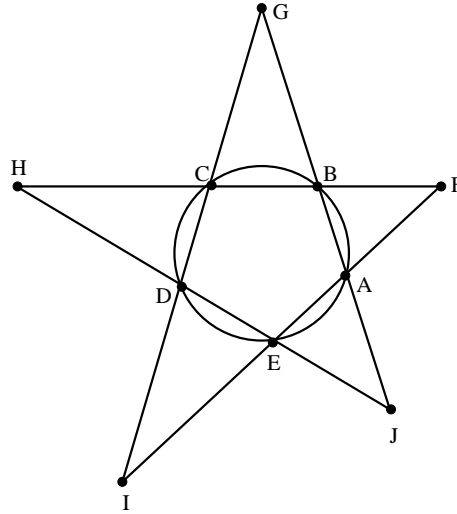


FIG. 2 – Dessin à l'exercice 4.

Exercice 5. En se basant sur l'exercice précédent, proposer un algorithme de complexité $O(\log n)$ pour la recherche de deux sommets du polygone avec des signes de $ax + by + c$ opposés.

Dans quelles circonstances sera-t-on amené à utiliser la partie (b) de l'exercice 3 ?

Faire une conclusion concernant la complexité totale de l'algorithme exposé sur la première page.

La partie restante du problème concerne la construction de l'intersection d'un polytope de dimension 3 avec un plan. Nous n'allons pas développer la totalité de l'algorithme en question mais nous nous bornerons à quelques remarques utiles à son sujet.

Exercice 6. Montrer sur un exemple qu'en dimension 3 on ne peut pas espérer une complexité meilleure que linéaire.

Une des difficultés techniques de l'algorithme éventuel de section d'un polytope consiste en ce qu'il faudra appliquer l'algorithme d'intersection de polygone par une ligne droite non plus sur le plan horizontal mais sur des plans dans l'espace (les plans des faces du polytope). En fait, on peut faire toutes les opérations nécessaires en projetant tous les objets sur le plan horizontal.

Exercice 7. (a) Soit un plan dans \mathbb{R}^3 donné par l'équation

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Comment, en regardant les coefficients de cette équation, dire si le plan est vertical ou non ?

(b) Soit une ligne droite dans \mathbb{R}^3 qui est une intersection de deux plans non verticaux :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Trouver une équation de la projection de cette ligne sur le plan horizontal. [Indication : éliminer z .]

(c) Proposer une méthode pour trouver une intersection d'une face de polytope se trouvant sur le plan $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ avec le plan $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

Exercice 8. Proposer un plan (une suite d'étapes principales) d'un algorithme qui trouve une intersection d'un polytope par un plan. (Entrée : un polytope. Sortie : deux polytopes obtenus par la section.)

Donner une estimation de la complexité de chaque étape, et justifier brièvement.

(Il n'est pas interdit d'expliquer quelles sont les étapes de l'algorithme restées en dehors du cadre de nos considérations.)

FIN DE L'ÉNONCÉ