

Devoir surveillé 1

1er octobre 2007; durée 1 heure; sans document

Exercice 1. Donner quatre exemples :

1. d'ordre total bien fondé;
2. d'ordre total non bien fondé;
3. d'ordre partiel bien fondé;
4. d'ordre partiel non bien fondé.

Justifier vos réponses.

Exercice 2. Soit E un ensemble ordonné, x un élément de E . On note S_x l'ensemble des éléments de E strictement supérieurs à x . Déterminer les éléments minimaux de S_x (s'il en existe) dans chacun des cas suivants :

1. $E = \mathbb{N}$ ordonné naturellement, et $x = 7$.
2. $E = \{1, 2, 3, \dots, 18\}$ ordonné par la relation "divise", et $x = 2$.
3. $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ muni de l'ordre produit, et $x = (5, 3)$.
4. $E = \mathbb{R}$ ordonné naturellement, et $x = -2$.

Exercice 3. On dit qu'un mot $u \in A^*$ est un *préfixe* du mot $v \in A^*$ si v peut être représenté sous forme $v = ut$, $t \in A^*$.

1. Montrer que la relation sur A^* définie par

$$uRv \Leftrightarrow u \text{ est un préfixe de } v$$

est un ordre.

2. Cet ordre est-il total ou partiel? Bien fondé ou non?
3. Dessiner le diagramme de Hasse pour l'ensemble des mots de longueur au plus 3 (prendre comme alphabet $A = \{a, b\}$).

Exercice 4. Donner un ordre total sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que chaque élément ait un nombre fini de prédécesseurs.