

Informatique Théorique 1 : Examen

4 mars 2008 ; 8h30—10h00 (durée 1h30) ; sans documents

Responsable : Alexandre Zvonkine

I. Ordres

Exercice 1. Soient les trois ordres sur \mathbb{N}^3 dont il était question dans le sujet de l'examen de la première session :

1. **L'ordre lexicographique** : $(m_1, n_1, k_1) \leq (m_2, n_2, k_2)$ si et seulement si $m_1 < m_2$, ou $m_1 = m_2$ mais $n_1 < n_2$, ou $m_1 = m_2$ et $n_1 = n_2$ mais $k_1 \leq k_2$.
2. **L'ordre lexicographique gradué** : $(m_1, n_1, k_1) \leq (m_2, n_2, k_2)$ si et seulement si $m_1 + n_1 + k_1 < m_2 + n_2 + k_2$, ou si $m_1 + n_1 + k_1 = m_2 + n_2 + k_2$ mais $(m_1, n_1, k_1) \leq (m_2, n_2, k_2)$ en ordre lexicographique.
3. **L'ordre lexicographique gradué "renversé"** : $(m_1, n_1, k_1) \leq (m_2, n_2, k_2)$ si et seulement si $m_1 + n_1 + k_1 < m_2 + n_2 + k_2$, ou si $m_1 + n_1 + k_1 = m_2 + n_2 + k_2$ mais une des conditions suivantes est vraie : $k_1 > k_2$, ou $k_1 = k_2$ mais $n_1 \geq n_2$.

A. Pour les deux premiers ordres, écrire en ordre croissant les 10 plus petits éléments $(m, n, k) \in \mathbb{N}^3$.

B. Pour le troisième ordre, écrire en ordre croissant tous les éléments $(m, n, k) \in \mathbb{N}^3$ tels que $m + n + k = 3$.

C. Pour chacun des trois ordres, donner un élément qui précède immédiatement l'élément $(7, 3, 2)$.

II. Langages et automates

Exercice 2. Soit $m, n \in \mathbb{N}$ deux entiers naturels fixés, $m \geq n$. Soit $L_{m,n}$ le langage sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ qui se compose des mots $u \in A^*$ tels que :

1. La différence entre $|u|_a$ et $|u|_b$ ne dépasse pas n :

$$\left| |u|_a - |u|_b \right| \leq n ;$$

2. Pour tout préfixe v de u , la différence entre $|v|_a$ et $|v|_b$ ne dépasse pas m :

$$\left| |v|_a - |v|_b \right| \leq m .$$

Construire un automate fini, déterministe et complet reconnaissant le langage $L_{m,n}$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel fixé. Soit L_n le langage sur l'alphabet $A = \{a, b\}$ qui se compose des mots $u \in A^*$ tels que seule la première condition de l'exercice précédent soit satisfaite : $\left| |u|_a - |u|_b \right| \leq n$. Montrer que le langage L_n n'est pas reconnaissable par un automate fini.

III. Logique

Exercice 4. Soient A, B, C trois formules logiques. Montrer que :

1. Si la formule $(A \vee B) \rightarrow C$ est fausse alors la formule $\neg B \wedge C$ est elle aussi fausse.
2. Sous la même condition, montrer que la formule $(B \vee \neg C) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ est vraie.

FIN DE L'ÉNONCÉ