

Modèles de Calcul : Corrigé du devoir à la maison

Exercice 1

Répondre par oui ou par non aux questions suivantes. Les explications ne sont pas exigées.

1. L'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels est dénombrable. – OUI
2. L'ensemble \mathbb{Z} de tous les entiers est dénombrable. – OUI
3. L'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels est dénombrable. – OUI
4. L'ensemble \mathbb{R} des nombres réels est dénombrable. – NON
5. L'ensemble $T = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 3 \pmod{7}\}$ est décidable. – OUI
6. Tout langage rationnel est décidable. – OUI
7. Le complément à un ensemble fini est décidable. – OUI
8. Toute fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f(n) = 17$ pour tout $n \geq 91$, est calculable. – OUI
9. Tout algorithme peut être réalisé par un automate à pile. – NON
10. Tout algorithme peut être réalisé par une machine de Turing. – OUI

Exercice 2

Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y \geq x^2\}$. Donner une bijection de C dans \mathbb{N} .

Corrigé. L'application $f : (x, y) \rightarrow (x, y - x^2)$ est une bijection de C dans \mathbb{N}^2 . En effet, elle fait une "translation" de chaque colonne verticale de l'ensemble C de x^2 unités vers le bas et, étant donné que $y \geq x^2$, nous obtenons $y - x^2 \geq 0$. Maintenant, après avoir obtenu \mathbb{N}^2 , on peut appliquer, par exemple, la fonction τ (vue en TD) qui réalise une bijection $\tau : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$. Une bijection de C dans \mathbb{N} est donc $\tau(x, y - x^2)$.

Autres solutions sont aussi possibles.

Exercice 3

La conjecture de Goldbach formulée en 1742, et qui reste toujours non démontrée, affirme que tout nombre pair à partir de 4 est la somme de deux nombres premiers. Représenter cette conjecture sous forme d'un problème de l'arrêt pour un algorithme (ou un programme) particulier.

Corrigé. Soit une fonction `premier(m)` qui retourne *vrai* si m est premier, et qui retourne *faux* sinon. Le programme suivant (voir la page suivante) cherche, et retourne s'il le trouve, le plus petit entier n qui soit pair mais ne soit pas une somme de deux nombres premiers. Selon la conjecture, un tel n n'existe pas, ce qui est équivalent à dire que le programme ci-dessous ne s'arrête pas.

```

n = 6
ind = 1
tantque ind = 1 faire
  ind = 0
  k = 3
  tantque (ind = 0) ET (k <= n/2) faire
    si premier(k) ET premier(n-k) alors
      ind = 1
    sinon
      k = k+2
    fin-si
  fin-tantque
  si ind = 1 alors
    n = n+2
  fin-si
fin-tantque
retourner n

```

Exercice 4

Soit A un alphabet fini, et soit $f : A^* \rightarrow A^*$ une fonction calculable et totale.

1. (Facile) Montrer que pour tout langage $L \subseteq A^*$ semi-décidable son image $f(L)$ est semi-décidable.
2. (Difficile) Montrer que si L est décidable, cela n'implique pas que $f(L)$ soit décidable.

Corrigé.

1. Soit un algorithme P qui énumère le langage L . En appliquant à chaque sortie de P la fonction f nous obtenons un algorithme qui énumère le langage $f(L)$.
2. Soit M un langage semi-décidable mais non-décidable, et soit Q un algorithme qui vérifie l'appartenance $v \in M$. Cet algorithme peut répondre positivement mais ne peut pas répondre négativement.

Soit R l'ensemble de paires (v, t) , $v \in A^*$, $t \in \mathbb{N}$, telles que l'algorithme Q , ayant été appliqué à v , donne une réponse positive *après avoir fait au plus t opérations*. Il est évident que l'ensemble R est décidable : si une réponse positive de Q n'est pas parvenue après t opérations, on peut répondre négativement, en affirmant que $(v, t) \notin R$. Il est clair aussi que la fonction $f(v, t) = v$ donne $f(R) = M$. Il reste à représenter l'ensemble R sous forme d'un langage $L \subseteq A^*$; la forme concrète de cette représentation n'a pas d'importance.

Exercice 5

Construire une machine de Turing à deux bandes qui, pour un mot $u \in \{a, b\}^*$ donné, compte le nombre d'occurrences de la lettre a dans u .

Corrigé. Le symbole \square représente l'espace blanc, le symbole $|$ indique que la tête ne bouge pas.

Le mot d'entrée est écrit sur la première bande. La tête se trouve sur la première lettre du mot. Le nombre à calculer, en binaire, se trouve sur la deuxième bande ; la tête se trouve sur le dernier chiffre du nombre. Au début, la deuxième bande est vide.

La première bande est destinée à la lecture seule, le symbole “écrit” pour cette bande n’est donc pas représenté.

Les colonnes de la table :

- A : Lecture sur la première bande
- B : Déplacement de la tête sur la première bande
- C : L’état suivant
- D : Lecture sur la deuxième bande
- E : Écriture sur la deuxième bande
- F : Déplacement de la tête sur la deuxième bande
- G : L’état suivant

Les états de la machine :

- q_0 : L’état initial ; lecture sur la première bande
- q_1 : Addition de 1 sur la deuxième bande
- q_2 : Retour au dernier chiffre du mot binaire sur la deuxième bande
- q_f : L’état terminal

état	A	B	C	D	E	F	G
q_0	a	\rightarrow	q_1				
	b	\rightarrow	q_0				
	\square	$ $	q_f				
q_1				0	1	$ $	q_2
				1	0	\leftarrow	q_1
				\square	1	$ $	q_2
q_2				0	0	\rightarrow	q_2
				1	1	\rightarrow	q_2
				\square	\square	\leftarrow	q_0
q_f							