

Modèles de Calcul : Examen de 10 décembre 2015

Corrigé

14h00–17h00 ; durée 3 heures

Responsable : Alexandre Zvonkine

Tous documents autorisés ; le barème total est sur 24 points

Exercice 1

(/5) Répondre par oui ou par non aux questions suivantes. Les explications ne sont pas exigées.

1. L'ensemble \mathcal{F} des fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ est dénombrable. – NON
2. L'ensemble des nombres composites (c'est-à-dire, non premiers) est décidable. – OUI
3. Pour un alphabet A donné, l'ensemble des palindromes appartenant à A^* est décidable. – OUI
4. Le complément à un ensemble semi-décidable est aussi semi-décidable. – NON (pas toujours)
5. Toute machine de Turing peut être simulée par un automate à pile. – NON
6. Toute machine de Turing peut être simulée par une instance du problème de correspondance de Post. – OUI
7. Tout problème NP-complet est décidable. – OUI
8. Le problème de recherche d'une clique de taille 3 dans un graphe donné est NP-complet. – NON
9. Le problème de vérification si un graphe donné est connexe est polynomial. – OUI
10. Tout problème NP-complet admet une réduction polynomiale à tout autre problème NP-complet. – OUI

Exercice 2

(/4) Soit \mathcal{C} l'ensemble des chemins de longueur finie sur le réseau \mathbb{N}^2 qui partent de l'origine $(0, 0)$ et qui font des pas de longueur 1 soit à droite, soit vers le haut. Donner une bijection h de \mathcal{C} dans \mathbb{N} .

Corrigé. Les chemins sur \mathbb{N}^2 peuvent être codés par des mots binaires appartenant à $\{0, 1\}^*$ comme il est indiqué sur la figure 1 : un pas vers la droite est codé par 0, un pas vers le haut est codé par 1. Une bijection entre $\{0, 1\}^*$ et \mathbb{N} a été construite en TD. Pour le rappel : (a) on met un chiffre 1 supplémentaire devant le mot ; (b) on interprète le résultat comme un entier écrit en binaire ; (c) on soustrait 1 de cet entier (pour que la numération commence par 0 et non pas par 1).

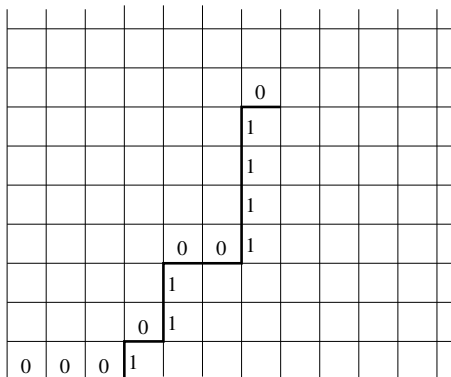


FIGURE 1 – Un chemin codé par le mot binaire 00010110011110

Exercice 3

(/6) Soit \mathcal{P} l'ensemble des programmes qui calculent les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ayant la propriété suivante : si $f(x)$ est définie alors le nombre $y = f(x)$ est premier. Montrer que l'ensemble \mathcal{P} n'est pas semi-décidable.

Indication. Expliquer pourquoi le complément de \mathcal{P} est semi-décidable, puis utiliser le théorème de Rice.

Corrigé. Soit \mathcal{Q} le complément de \mathcal{P} . Selon le théorème de Rice, ni \mathcal{P} ni \mathcal{Q} ne sont décidables. Par conséquent, ils ne peuvent pas être tous les deux semi-décidables (car dans un tel cas ils seraient tous les deux décidables). Il suffit donc de montrer que \mathcal{Q} soit semi-décidable pour conclure que \mathcal{P} n'est pas semi-décidable.

L'ensemble \mathcal{Q} consiste des programmes qui calculent les fonctions $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ayant la propriété suivante : il existe un x tel que $g(x)$ est définie mais le nombre $y = g(x)$ n'est pas premier. Alors, pour un programme donné q l'appartenance $q \in \mathcal{Q}$ est vérifiable. En effet, il suffit de lancer le programme q en parallèle sur toutes les données et observer les résultats sortis. Une fois un entier non premier sorti, on conclut que $q \in \mathcal{Q}$.

Exercice 4

(/4) Construire une machine de Turing à une bande, qui divise par 2 un nombre donné n représenté en *système décimal*. Les zéros au début du mot sont autorisés.

Exemple : Pour $n = 215$, le résultat doit être 107.5; pour $n = 172$, le résultat doit être 086.

Corrigé. La machine de Turing est présentée dans la table 1. Au début, la tête se trouve sur le chiffre le plus à gauche.

- Colonne A : l'état de la machine ;
- Colonne B : "on lit" ;
- Colonne C : "on écrit" ;
- Colonne D : le déplacement de la tête ;
- Colonne E : l'état suivant ;
- q_0 : l'état initial, et aussi l'état sans retenu ;
- q_1 : l'état avec retenu ;
- q_f : l'état terminal ;
- Symbole \square : l'espace blanc ;

— Symbole | : la tête ne se déplace pas.

A	B	C	D	E
q_0	0	0	→	q_0
	1	0	→	q_1
	2	1	→	q_0
	3	1	→	q_1
	4	2	→	q_0
	5	2	→	q_1
	6	3	→	q_0
	7	3	→	q_1
	8	4	→	q_0
	9	4	→	q_1
	□	□	←	q_f

A	B	C	D	E
q_1	0	5	→	q_0
	1	5	→	q_1
	2	6	→	q_0
	3	6	→	q_1
	4	7	→	q_0
	5	7	→	q_1
	6	8	→	q_0
	7	8	→	q_1
	8	9	→	q_0
	9	9	→	q_1
	□	.	→	q_2

A	B	C	D	E
q_2	□	5		q_f
q_f				

TABLE 1 – Machine de Turing de l'exercice 4

Exercice 5

(/5) Donner une réduction polynomiale du problème CIRCUIT HAMILTONIEN au problème VOYAGEUR DE COMMERCE. Les énoncés de ces deux problèmes sont donnés ci-dessous.

Le problème CIRCUIT HAMILTONIEN est le suivant :

Instance : Un graphe non orienté G .

On cherche : Un parcours fermé qui passe par tous les sommets du graphe une et une seule fois et qui revient au sommet de départ.

Le problème VOYAGEUR DE COMMERCE est le suivant :

Instance : Un ensemble de n villes; les prix p_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, des trajets directs d'une ville i à une ville j ; la somme d'argent disponible S .

On cherche : Un parcours fermé qui passe par toutes les villes une et une seule fois et qui revient à la ville de départ, et dont le prix total ne dépasse pas S .

Remarque. Pour le problème CIRCUIT HAMILTONIEN, les déplacements se font uniquement par les arêtes du graphe G . Pour le problème VOYAGEUR DE COMMERCE, il n'y a pas de contraintes de cette sorte : on peut aller de toute ville à toute autre. (Les seules contraintes sont les prix.)

Corrigé. Soit le graphe G instance du problème CIRCUIT HAMILTONIEN. On fabrique l'instance suivante du problème VOYAGEUR DE COMMERCE : les prix p_{ij} sont égaux à

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \text{ est une arête du graphe } G, \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On choisit la somme d'argent disponible $S = n$ où n est le nombre de sommets du graphe G , qui est du même coup le nombre d'arêtes que doit parcourir un circuit hamiltonien. Alors, un parcours pour le voyageur de commerce dont le prix total ne dépasse pas n existe si et seulement si le voyageur emprunte uniquement les trajets (i, j) qui sont les arêtes du graphe, et donc si et seulement si le graphe contient un circuit hamiltonien.