

Modèles de Calcul : Examen de 10 décembre 2015

14h00–17h00 ; durée 3 heures
Responsable : Alexandre Zvonkine

Tous documents autorisés

Exercice 1

Répondre par oui ou par non aux questions suivantes. Les explications ne sont pas exigées.

1. L'ensemble \mathcal{F} des fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ est dénombrable.
2. L'ensemble des nombres composites (c'est-à-dire, non premiers) est décidable.
3. Pour un alphabet A donné, l'ensemble des palindromes appartenant à A^* est décidable.
4. Le complément à un ensemble semi-décidable est aussi semi-décidable.
5. Toute machine de Turing peut être simulée par un automate à pile.
6. Toute machine de Turing peut être simulée par une instance du problème de correspondance de Post.
7. Tout problème NP-complet est décidable.
8. Le problème de recherche d'une clique de taille 3 dans un graphe donné est NP-complet.
9. Le problème de vérification si un graphe donné est connexe est polynomial.
10. Tout problème NP-complet admet une réduction polynomiale à tout autre problème NP-complet.

Exercice 2

Soit \mathcal{C} l'ensemble des chemins de longueur finie sur le réseau \mathbb{N}^2 qui partent de l'origine $(0, 0)$ et qui font des pas de longueur 1 soit à droite, soit vers le haut. Donner une bijection h de \mathcal{C} dans \mathbb{N} .

Exercice 3

Soit \mathcal{P} l'ensemble des programmes qui calculent les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ayant la propriété suivante : si $f(x)$ est définie alors le nombre $y = f(x)$ est premier. Montrer que l'ensemble \mathcal{P} n'est pas semi-décidable.

Indication. Expliquer pourquoi le complément de \mathcal{P} est semi-décidable, puis utiliser le théorème de Rice.

Exercice 4

Construire une machine de Turing à une bande, qui divise par 2 un nombre donné n représenté en *système décimal*. Les zéros au début du mot sont autorisés.

Exemple : Pour $n = 215$, le résultat doit être 107.5 ; pour $n = 172$, le résultat doit être 086.

Exercice 5

Donner une réduction polynomiale du problème CIRCUIT HAMILTONIEN au problème VOYAGEUR DE COMMERCE. Les énoncés de ces deux problèmes sont donnés ci-dessous.

Le problème CIRCUIT HAMILTONIEN est le suivant :

Instance : Un graphe non orienté G .

On cherche : Un parcours fermé qui passe par tous les sommets du graphe une et une seule fois et qui revient au sommet de départ.

Le problème VOYAGEUR DE COMMERCE est le suivant :

Instance : Un ensemble de n villes; les prix p_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$, des trajets directs d'une ville i à une ville j ; la somme d'argent disponible S .

On cherche : Un parcours fermé qui passe par toutes les villes une et une seule fois et qui revient à la ville de départ, et dont le prix total ne dépasse pas S .

Remarque. Pour le problème CIRCUIT HAMILTONIEN, les déplacements se font uniquement par les arêtes du graphe G . Pour le problème VOYAGEUR DE COMMERCE, il n'y a pas de contraintes de cette sorte : on peut aller de toute ville à toute autre. (Les seules contraintes sont les prix.)