

Modèles de Calcul : devoir à la maison

2 novembre 2015

Rendre les copies à votre enseignant de groupe pendant la semaine 47
Vous pouvez travailler ensemble en petites équipes mais chacun(e) doit rédiger sa copie
individuellement.

Exercice 1

Répondre par oui ou par non aux questions suivantes. Les explications ne sont pas exigées.

1. L'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels est dénombrable.
2. L'ensemble \mathbb{Z} de tous les entiers est dénombrable.
3. L'ensemble \mathbb{Q} des nombres rationnels est dénombrable.
4. L'ensemble \mathbb{R} des nombres réels est dénombrable.
5. L'ensemble $T = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 3 \pmod{7}\}$ est décidable.
6. Tout langage rationnel est décidable.
7. Le complément à un ensemble fini est décidable.
8. Toute fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f(n) = 17$ pour tout $n \geq 91$, est calculable.
9. Tout algorithme peut être réalisé par un automate à pile.
10. Tout algorithme peut être réalisé par une machine de Turing.

Exercice 2

Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid y \geq x^2\}$. Donner une bijection de C dans \mathbb{N} .

Exercice 3

La conjecture de Goldbach formulée en 1742, et qui reste toujours non démontrée, affirme que tout nombre pair à partir de 4 est la somme de deux nombres premiers. Représenter cette conjecture sous forme d'un problème de l'arrêt pour un algorithme (ou un programme) particulier. Vous pouvez utiliser un primitif `premier(n)` qui vérifie si un nombre donné est premier ou non.

Exercice 4

Soit A un alphabet fini, et soit $f : A^* \rightarrow A^*$ une fonction calculable et totale.

1. (Facile) Montrer que pour tout langage $L \subseteq A^*$ semi-décidable son image $f(L)$ est semi-décidable.
2. (Difficile) Montrer que si L est décidable, cela n'implique pas que $f(L)$ soit décidable.

Exercice 5

Construire une machine de Turing à deux bandes qui, pour un mot $u \in \{a, b\}^*$ donné, compte le nombre d'occurrences de la lettre a dans u .