

## Modèles de Calcul : feuille 4

### Ensembles décidables et semi-décidables

**Le temps partagé.** Les questions suivantes ne sont pas des exercices. On vous propose d'y réfléchir en pensant aux algorithmes d'une manière informelle. Plus exactement, cela veut dire que :

- Tout algorithme peut être implémenté en tant que machine de Turing (thèse de Church), mais vous n'êtes pas obligés de construire une telle machine explicitement.
- Il faut se débarrasser de toute considération d'efficacité et se poser uniquement la question "est-ce possible ou non" ?

#### Questions :

1. Soit un algorithme  $A$ . Comment le transformer en un autre algorithme  $A'$  qui simule  $A$  et qui calcule en même temps le nombre d'opérations faites par  $A$  ?
2. Comment faire marcher un algorithme non pas sur une donnée particulière mais sur toutes ses données ?
3. Comment appliquer à une donnée tous les algorithmes ?
4. Comment faire marcher tous les algorithmes sur toutes les données ?

**Terminologie.** On dit qu'un algorithme  $A$  énumère un ensemble  $X$  si  $A$ , en travaillant sans arrêt, retourne au fur et à mesure tous les éléments de  $X$ .

#### Exercice 4.1

1. Soit un ensemble semi-décidable. Comment l'énumérer ?
2. Montrer que tout ensemble semi-décidable peut être énuméré sans répétitions (c'est-à-dire, sans retourner le même élément plusieurs fois).

#### Exercice 4.2

1. Montrer que s'il existe un algorithme  $A$  qui énumère un ensemble  $X$  alors  $X$  est semi-décidable.
2. Soit un langage  $L \subseteq \Sigma^*$  et son complémentaire  $M = \Sigma^* \setminus L$ . Montrer que si  $L$  et  $M$  sont tous les deux semi-décidables alors ils sont tous les deux décidables.
3. Donner un exemple d'un ensemble semi-décidable dont le complément ne l'est pas.

Indication : Servez-vous du problème de l'arrêt.

### Exercice 4.3

1. Montrer que tout ensemble fini est décidable.
2. Montrer qu'un sous-ensemble de  $\mathbb{N}$  qui peut être énuméré en ordre croissant est décidable.
3. Montrer qu'un langage  $L \subseteq \Sigma^*$  qui peut être énuméré en ordre hiérarchique croissant est décidable.  
Rappel : Pour deux mots  $u, v \in \Sigma^*$  on dit que  $u < v$  en ordre hiérarchique si et seulement si soit  $|u| < |v|$ , soit  $|u| = |v|$  mais  $u < v$  en ordre lexicographique.
4. Le même argument est-il applicable
  - à un ensemble de nombres rationnels qui peut être énuméré en ordre croissant ?
  - à un langage qui peut être énuméré en ordre lexicographique croissant ?Justifier vos réponses.
5. (Exercice difficile) Trouver un langage qui peut être énuméré en ordre lexicographique croissant et que n'est pas décidable.

### Exercice 4.4

Montrer que tout ensemble semi-décidable et infini possède un sous-ensemble décidable et infini.

### Exercice 4.5

1. Soit  $f(x)$  une fonction calculable *partielle* (c'est-à-dire, pas forcément partout définie). Proposer un algorithme qui énumère l'ensemble  $\text{Val}(f)$ . (Cet ensemble s'appelle le *domaine des valeurs* de  $f$ .)
2. Montrer que tout ensemble semi-décidable et *non vide* est le domaine des valeurs d'une fonction calculable et *totale* (c'est-à-dire, partout définie).

### Exercice 4.6

1. Soit  $f$  une fonction calculable partielle. Montrer que son domaine de définition  $\text{Dom}(f)$  est semi-décidable.
2. Montrer que tout ensemble semi-décidable est le domaine de définition d'une fonction calculable partielle.

### Exercice 4.7

Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une fonction calculable et totale qui vérifie la condition  $f(x) \geq x$ . Montrer que l'ensemble  $\text{Val}(f)$  est décidable.

(Attention ! On ne dit pas que la fonction  $f$  soit croissante !)

### Exercice 4.8

Soit  $X \subseteq \mathbb{N}$ , est soit  $\varphi(n) = \#(X \cap \{0, 1, \dots, n\})$ . Qu'est-ce qu'on peut dire à propos de la nature de l'ensemble  $X$  si

- la fonction  $\varphi$  est calculable ?

- la fonction  $\varphi_2(n) = \varphi(n) \bmod 2$  est calculable ?
- la fonction  $\varphi_3(n) = \varphi(n) \bmod 3$  est calculable ?
- on peut décider, pour tout  $n$ , si  $\varphi(n)$  est divisible par 3 ou non ?

### Exercice 4.9

1. Donner un exemple d'une fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$  qui soit totale et *non calculable*.
2. Donner un exemple d'une fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  totale et croissante (en sens large ou non) qui ne soit pas calculable.
3. Montrer que toute fonction  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  totale et décroissante en sens large est calculable.

### Exercice 4.10

Une situation suivante est-elle possible ?

- Une fonction  $f(n)$  est totale et non calculable.
- Quel que soit  $m \geq 1$ , la fonction  $f_m(n) = f(n) \bmod m$  est calculable.

Indication : Considérer la fonction  $f(n) = g(n) \cdot n!$  où  $g(n)$  est totale et non calculable.

### Exercice 4.11

Soit  $X$  et  $Y$  deux ensembles semi-décidables (mais pas forcément décidables). Comment fabriquer deux ensembles semi-décidables et *disjoints*  $X'$  et  $Y'$  tels que  $X' \subseteq X$ ,  $Y' \subseteq Y$ , et  $X' \cup Y' = X \cup Y$ .

### Exercice 4.12

Montrez que pour tout langage semi-décidable  $L$ , il existe un langage décidable  $K$  tel que

$$L = \{ x \mid \exists y : \langle x, y \rangle \in K \}.$$

### Exercice 4.13

Soit  $R(x, t)$  un prédicat décidable sur  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . Est-il vrai que l'ensemble

$$X = \{ x \in \mathbb{N} \mid \forall t R(x, t) \}$$

est toujours semi-décidable ?

Indication : Considérer le complément de  $X$ .

### Exercice 4.14

1. Soit  $X \subseteq \mathbb{N}$  un ensemble décidable. Pour tout  $x \in X$  on met dans  $Y$  les entiers  $1, x, x^2, x^3 \dots$ . Montrer que  $Y$  soit décidable.
2. Soit  $X \subseteq \mathbb{N}$  un ensemble décidable. Pour tout  $x \in X$  on met dans  $Y$  l'entier  $y = x - t^2$  ou  $t^2$  est le plus grand carré inférieur ou égal à  $x$ . Montrer que  $Y$  peut ne pas être décidable.

Indication : Prendre un  $Y$  semi-décidable mais pas décidable, et construire un  $X$  décidable qui engendre  $Y$ .

**Exercice 4.15**

Donner un exemple d'un ensemble  $X \subseteq \mathbb{N}$  qui ne soit pas semi-décidable et tel que son complément  $Y = \mathbb{N} \setminus X$  ne soit pas semi-décidable non plus.

Indication : Penser aux sous-ensembles des nombres pairs et impairs.

**Exercice 4.16**

Montrer que l'ensemble  $\mathcal{Z}$  des fonctions calculables partielles  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  qui vérifient la condition "si  $f(x)$  est définie alors  $f(x) = 0$ " n'est pas semi-décidable.

Indication : Considérer le complément  $\mathcal{F} \setminus \mathcal{Z}$ ; utiliser le théorème de Rice.

**Exercice 4.17**

Montrer que, quelle que soit une fonction calculable  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , il existe toujours une infinité de programmes qui la calculent.

Indication : Utiliser le théorème de Rice.

**Exercice 4.18**

1. Soit  $F$  l'ensemble des facteurs de longueur 5 du développement décimal du nombre  $\pi$ . Montrer que  $F$  soit décidable.
2. Soit  $S \subseteq \{7\}^*$  l'ensemble des facteurs du développement décimal du nombre  $\pi$  qui consistent des seuls chiffres 7. Montrer que  $S$  soit décidable.

**Exercice 4.19**

(Exercice difficile) Montrer que l'ensemble des programmes qui calculent les fonctions totales  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  n'est pas semi-décidable.

**Exercice 4.20**

Soit  $X \subseteq \mathbb{N}$  un sous-ensemble *fini* de  $\mathbb{N}$  donné sous forme d'un programme  $P$  qui pour tout  $x \in \mathbb{N}$  répond si  $x \in X$  ou non. Le programme  $P$  est "une boîte noire" : on ne sait pas qu'est-ce qu'il se trouve à l'intérieur de  $P$ .

1. Comment faire un programme qui, si  $X$  n'est pas vide, retourne

$$\min \{ x \mid x \in X \} ?$$

2. Comment faire un programme qui, si  $X$  n'est pas vide, retourne

$$\max \{ x \mid x \in X \} ?$$

Dans tous les deux cas vous pouvez utiliser  $P$  comme un sous-programme.

Attention! Il y a un piège dans cet exercice.