

Modèles de calcul : feuille 5

Réductions polynomiales et NP-complétude

Exercice 1 Soit la formule Booléenne

$$\varphi = ((x_1 \wedge \neg x_2) \rightarrow (\neg x_3 \vee x_4)) \wedge (\neg x_1 \vee x_3).$$

Expliquer en détail comment construire une formule $\tilde{\varphi}$ ayant la forme 3-SAT et telle que

$$\varphi \text{ est satisfaisable} \iff \tilde{\varphi} \text{ est satisfaisable.}$$

On ne demande pas d'écrire la formule $\tilde{\varphi}$ en totalité car elle serait trop longue, mais il faut expliquer comment estimer la longueur de $\tilde{\varphi}$ en fonction de la longueur de φ .

Le problème PROGRAMMATION ENTIÈRE est le suivant :

- Instance : n variables x_1, x_2, \dots, x_n qui représentent des nombres entiers ; un système de $N = O(n)$ égalités et inégalités linéaires qui inclut, entre autres, les inégalités de type

$$0 \leq x_1 \leq a_1, \quad 0 \leq x_2 \leq a_2, \quad \dots, \quad 0 \leq x_n \leq a_n.$$

- Question : Existe-t-il une solution (en nombres entiers) du système ?

Exercice 2

1. Quel est votre avis : pourquoi impose-t-on les conditions

$$0 \leq x_1 \leq a_1, \quad 0 \leq x_2 \leq a_2, \quad \dots, \quad 0 \leq x_n \leq a_n$$

sur les variables x_1, x_2, \dots, x_n ?

2. Donner une réduction polynomiale du problème 3-SAT au problème PROGRAMMATION ENTIÈRE.

Le problème COUVERTURE PAR SOMMETS est le suivant :

- Instance : Un graphe non-orienté $G = (V, E)$ et un entier p .
- Question : Existe-t-il un sous-ensemble $C \subseteq V$, $|C| = p$, tel que pour toute arête $(u, v) \in E$ au moins une de ses extrémités u, v appartient à C ?

Exercice 3 Donner une réduction polynomiale du problème 3-SAT au problème COUVERTURE PAR SOMMETS. (Attention, cet exercice est difficile.)

Le problème CLIQUE est le suivant :

- Instance : Un graphe non-orienté H et un entier q .
- Question : Existe-t-il un sous-graphe *complet* de H ayant q sommets (une q -clique) ?

Le problème ENSEMBLE INDÉPENDANT est le suivant :

- Instance : Un graphe non-orienté $K = (V, E)$ et un entier r .
- Question : Existe-t-il un sous-ensemble $D \subseteq V$, $|D| = r$, tel que pour toute paire de sommets $u, v \in D$ le graphe K ne contient pas d'arête $(u, v) \in E$.

Exercice 4 Montrer que les trois problèmes CLIQUE, COUVERTURE PAR SOMMETS et ENSEMBLE INDÉPENDANT se réduisent mutuellement l'un à l'autre.

Indication : Considérer le graphe H *complémentaire* à G : l'ensemble des sommets est le même, $V(G) = V(H)$, et pour deux sommets $u, v \in V(G)$ une arête (u, v) appartient à $E(H)$ si et seulement si elle n'appartient pas à $E(G)$.

Le problème SOUS-GRAPHE est le suivant :

- Instance : Deux graphes non-orientés G et H .
- Question : Existe-t-il un sous-graphe de G isomorphe à H ?

Le problème ISOMORPHISME DE GRAPHES est le suivant :

- Instance : Deux graphes non-orientés G et H .
- Question : Ces deux graphes sont-ils isomorphes l'un à l'autre ?

Exercice 5 Montrer que le problème CLIQUE ainsi que le problème ISOMORPHISME DE GRAPHES se réduisent au problème SOUS-GRAPHE.

Remarque. Il n'est pas connu si le problème ISOMORPHISME DE GRAPHES est NP-complet ou non. Une conviction générale est que ce problème est de *complexité intermédiaire* : plus compliqué que polynomial mais moins compliqué que NP-complet (tout cela, bien sûr, si $P \neq NP$).

Le problème SOMME D'ENTIERS est le suivant :

- Instance : Des entiers positifs x_1, x_2, \dots, x_n et un entier N .
- Question : Existe-t-il une sous-suite $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$ telle que $x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_p} = N$?

Le problème PREMIER TROU est le suivant :

- Instance : Des entiers positifs x_1, x_2, \dots, x_n .
- Question : Quel est le plus petit entier positif M qui ne peut pas être représenté comme somme $x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_p} = M$?

Exercice 6 On suppose que l'ensemble $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est déjà trié : $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.

1. Pour le problème SOMME D'ENTIERS proposer un algorithme qui utilise la mémoire de taille $O(N)$ et dont le temps de calcul est $O(nN)$.
2. Il est connu que le problème SOMME D'ENTIERS est NP-complet. Pourquoi l'existence de l'algorithme de la question (a) ne contredit pas à la NP-complétude du problème ?
3. Proposer un algorithme de complexité $O(n)$ pour le problème PREMIER TROU. Ce problème est-il NP-complet ?

Un *chemin Hamiltonien* dans un graphe G est un chemin qui passe une et une seule fois par chaque sommet du graphe. Un *circuit Hamiltonien* est un circuit fermé qui vérifie la même propriété.

Le problème CHEMIN HAMILTONIEN est le suivant :

- Instance : Un graphe non-orienté G .
- Question : Existe-t-il un chemin Hamiltonien dans G ?

Le problème CIRCUIT HAMILTONIEN est le suivant :

- Instance : Un graphe non-orienté G .
- Question : Existe-t-il un circuit Hamiltonien dans G ?

Exercice 7

1. Donner un exemple d'un graphe qui contient un chemin Hamiltonien mais ne contient pas de circuit Hamiltonien.
2. Montrer que le problème CHEMIN HAMILTONIEN se réduit au problème CIRCUIT HAMILTONIEN. C'est-à-dire, transformer un graphe donné G en un autre graphe H tel que G contienne un chemin Hamiltonien si et seulement si H contient un circuit Hamiltonien.

Exercice 8 Faire une réduction dans le sens inverse : réduire le problème CIRCUIT HAMILTONIEN au problème CHEMIN HAMILTONIEN.

Exercice 9 Réduire les problèmes CHEMIN HAMILTONIEN et CIRCUIT HAMILTONIEN au problème SAT.

Le problème 3-COLORATION DE GRAPHES est le suivant :

- Instance : Un graphe non-orienté G .
- Question : Existe-t-il une coloration des sommets du graphes G en 3 couleurs telle que les sommets adjacents soient toujours coloriés en couleurs différentes ?

D'une manière analogue, on peut définir un problème de k -coloration pour tout entier $k \geq 2$.

Exercice 10

1. Montrer que le problème de 2-COLORATION DE GRAPHES est polynomial.
2. Réduire le problème de 3-COLORATION DE GRAPHES au problème SAT.

Le problème TRIANGLE MONOCHROMATIQUE est le suivant :

- Instance : Un graphe non-orienté G .
- Question : Existe-t-il une coloration d'arêtes du graphes G en deux couleurs, disons rouge et bleu, telle qu'il n'y ait pas de triangle rouge ni de triangle bleu ?

Exercice 11

1. Colorier les arêtes du graphe K_5 en deux couleurs de telle sorte qu'il n'y ait pas de triangle monochromatique.
2. Montrer que, quelle que soit une coloration d'arêtes du graphe K_6 en deux couleurs, il existe toujours un triangle monochromatique.
3. Réduire le problème TRIANGLE MONOCHROMATIQUE au problème SAT.

Soit un graphe orienté $G = (V, E)$ où V est l'ensemble des sommets, et E est l'ensemble des arcs du graphe. On dit qu'un sous-ensemble $U \subseteq V$ est le *noyau* du graphe G si :

1. Quels que soient $u_1, u_2 \in U$, il n'y a pas d'arc $u_1 \rightarrow u_2$.
2. Pour tout $v \in V \setminus U$ il existe un $u \in U$ tel qu'il y a un arc $u \rightarrow v$.

Le problème NOYAU est le suivant :

- Instance : Un graphe orienté G .
- Question : Existe-t-il un noyau dans G ?

Exercice 12 Réduire le problème NOYAU au problème SAT.

Exercice 13 Voici une *fausse solution* de l'exercice précédent. À toute paire de sommets $i, j \in V$ on associe une variable Booléenne x_{ij} dont la valeur est

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{s'il y a un arc } i \rightarrow j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors la première propriété du noyau s'exprime ainsi :

$$\varphi_1 = \bigwedge_{i,j \in U} \neg x_{ij},$$

et la deuxième ainsi :

$$\varphi_2 = \bigwedge_{j \in V \setminus U} \bigvee_{i \in U} x_{ij}.$$

Le noyau dans le graphe G existe si et seulement si la formule Booléenne $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ est satisfaisable.

Critiquer cette "solution".