

## Comptage

**Exercice 1** Combien de nombres peut-on former avec les chiffres 0,1,2,3,4,5,6,7, chaque chiffre n'étant présent qu'une fois, de façon que chaque nombre commence par un 7 et soit divisible par 5,

- si les nombres sont de 8 chiffres ?
- si les nombres sont de 6 chiffres ?

**Exercice 2** Cinq hommes et quatre femmes vont au cinéma. Ils disposent d'une rangée de neuf places. De combien de façons différentes peuvent-ils s'asseoir si l'on veut que chaque femme soit entourée de deux hommes ?

**Exercice 3** On dispose de 5 billes rouges, 2 blanches et 3 bleues. Si les billes de même couleur sont indiscernables, de combien de façons peut-on les aligner ?

**Exercice 4** Un groupe de 5 mathématiciens et 7 physiciens doit élire un comité représentatif formé de 2 mathématiciens et 2 physiciens. Quel est le nombre de résultats possibles si :

- les 12 personnes sont éligibles ?
- un physicien est élu d'office ?
- 2 mathématiciens ne sont pas éligibles ?

**Exercice 5** Quel est le nombre de groupes de 6 personnes que l'on peut former avec 4 garçons et 6 filles si l'on veut qu'ils contiennent obligatoirement 2 garçons

- donnés ?
- seulement ?
- au moins ?

**Exercice 6** Les lettres du mot ABRACADABRA ont été mélangées, puis posées sur la table en ordre aléatoire. Toutes les permutations des lettres sont considérées comme ayant la même probabilité. Quelle est la probabilité d'obtenir le même mot ?

**Exercice 7** On dispose d'une fonction  $\text{rand}(k, l)$  qui, pour deux entiers  $k \leq l$  retourne un entier aléatoire  $i \in [k, l]$ . Proposer un algorithme pour former une permutation aléatoire de taille  $n$ .

**Exercice 8** Développer le triangle de Pascal jusqu'à  $n = 10$ .

**Exercice 9** Soit deux ensembles  $A$  et  $B$  contenant  $m$  et  $n$  éléments respectivement. Combien d'éléments peuvent contenir  $A \cup B$  et  $A \cap B$  ?

**Exercice 10** Combien de chiffres contient le nombre  $C_{100}^{50}$  ?

**Exercice 11** On dispose de  $n$  boules numérotées. On veut former  $k$  ensembles  $A_1, A_2, \dots, A_k$  contenant respectivement  $m_1, m_2, \dots, m_k$  boules, en utilisant toutes les boules (c'est-à-dire,  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$ ). De combien de façons peut-on le réaliser ? Précision : les suites des  $k$  ensembles sont considérées comme étant ordonnées.

**Exercice 12** Il faut distribuer  $n$  boules numérotées parmi  $m$  urnes, elles aussi numérotées. De combien de façons peut-on le faire ?

**Exercice 13** On considère l'ensemble des suites ordonnées des entiers positifs  $x_1, x_2, \dots, x_k$  tels que  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ . Montrer que la cardinalité de cet ensemble est égale à  $C_{n-1}^{k-1}$ .

**Exercice 14** Montrer l'identité suivante :

$$C_n^m \cdot C_m^k = C_n^{n-k} \cdot C_{n-k}^{m-k}.$$

Donner une interprétation combinatoire de cette identité.

**Exercice 15** Montrer l'identité suivante :

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^k)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

Donner une interprétation combinatoire de cette identité.