

Variables aléatoires continues

1 Probabilités géométriques

Exercice 1.1 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et réparties selon la loi uniforme sur le segment $[0, 1]$. Pour la variable aléatoire $Z = X + Y$ trouver :

- la fonction de répartition $F_Z(x) = \text{Prob}(Z < x)$;
- la densité $\varphi_Z(x) = F'_Z(x)$;
- l'espérance $E(Z)$;
- la variance $\text{Var}(Z)$.

Pour l'espérance et la variance proposer deux méthodes de calcul et comparer les résultats.

Exercice 1.2 Deux duellistes se sont mis d'accord pour que chacun d'entre eux vienne à l'endroit du duel à un moment aléatoire entre 17h et 18h. Lorsqu'un duelliste arrive, il attend cinq minutes, et si son adversaire n'est pas là au bout des 5 minutes, il part. Quelle est la probabilité que le duel ait lieu ?

Exercice 1.3 On jette au hasard deux points sur le segment $[0, 1]$. Ces points subdivisent le segment $[0, 1]$ en trois morceaux. Quelle est la probabilité que l'on puisse former un triangle dont les côtés sont égaux aux trois morceaux ainsi obtenus ?

Exercice 1.4 Il y a un cube de dimension n , de longueur de côté égale à 1. On le coupe par un hyperplan de dimension $n - 1$ orthogonal à la diagonale principale du cube et dont la distance à partir du centre du cube est égale à t . La section est un polytope $V = V(t)$ de dimension $n - 1$, et on s'intéresse au volume $(n - 1)$ -dimensionnel de ce polytope. Trouver la limite de ce volume quand t est fixe et $n \rightarrow \infty$.

2 Divers

Exercice 2.1 Soit X une variable aléatoire continue de densité

$$\varphi(x) = \begin{cases} ax(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de la fonction $\varphi(x)$. Quelle doit être la valeur du paramètre a pour que φ soit vraiment une densité ?
Dans la suite, on suppose que a prend cette valeur.

2. Calculer la fonction de répartition de X .
3. Calculer l'espérance de X .
4. Calculer la probabilité conditionnelle $P(X > 3/4 | X > 1/4)$.

Exercice 2.2 Soient X_1, X_2, X_3 trois variables indépendantes et uniformes sur le segment $[0, 1]$, et soit $Y = \max\{X_1, X_2, X_3\}$. Trouver la fonction de répartition et la densité de la variable Y .

3 Théorème central limite

Exercice 3.1 La probabilité pour qu'un bébé nouveau-né soit un garçon est 0.515. Quelle est la probabilité que sur 10 000 nouveaux-nés plus de la moitié soit des garçons ?

Exercice 3.2 Un tireur touche :

10	avec la probabilité	0.5,
9	avec la probabilité	0.3,
8	avec la probabilité	0.1,
7	avec la probabilité	0.05,
6	avec la probabilité	0.05.

Il tire 100 fois. Quelle est la probabilité qu'il obtient ≥ 980 points ? ≥ 950 points ?

Exercice 3.3 Au 16ème siècle, quand il n'y avait pas d'unités de mesure standards, dans certains endroits on déterminait la mesure *foot* par la procédure suivante : un dimanche, on mesurait les pieds des 16 premiers hommes qui sortaient de l'église et on calculait la moyenne de la longueur de leurs pieds. Plus tard on a établi que longueur moyenne d'un pied d'homme est égale à $m = 262.5$ mm, avec un écart-type $\sigma = 12$ mm.

1. Quelle est la probabilité que deux mesures obtenues pendant deux dimanches diffèrent de 5 mm ou plus ?
2. Combien d'hommes faudrait-il pour que, avec la probabilité 0.99, cette différence ne dépasse pas 0.5 mm ?

Indication. La somme, ainsi que la différence de deux variables Gaussiennes indépendantes est répartie selon la loi Gaussienne.

Exercice 3.4 Un vendeur de journaux vend ses journaux dans la rue. La probabilité pour qu'un passant achète un journal est de $1/3$. Quelle est la probabilité pour que le nombre de passants nécessaires pour vendre 100 journaux ne dépasse pas 270 ?

Exercice 3.5 Trouver les bornes entre lesquelles se trouve, avec la probabilité 0.99, la somme des points de 1000 jets indépendants d'un dé.