

## Variables aléatoires discrètes

**Exercice 1** On lance deux dés, et on obtient les résultats  $d_1$  et  $d_2$ . Notons  $d = \min(d_1, d_2)$ .

- Calculer les probabilités des événements  $d = 1, d = 2, \dots, d = 6$ .
- Calculer l'espérance de la variable  $d$ .
- Calculer la variance de  $d$ .
- Calculer les probabilités conditionnelles

$$P(d_1 = 6 \mid d = 3), \quad P(d = 3 \mid d_1 = 6).$$

**Exercice 2** Soient deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  prenant les valeurs 1, 2, 3. Les probabilités que  $(X, Y) = (i, j)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  sont indiquées dans la table suivante :

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$	$7/45$	$2/45$	$6/45$
$X = 2$	$4/45$	$5/45$	$3/45$
$X = 3$	$1/45$	$8/45$	$9/45$

1. Pour la variable  $X$ , quelles sont les probabilités que  $X = 1, X = 2, X = 3$ ?  
La même question pour la variable  $Y$ .
2. Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?
3. Calculer les espérances  $E(X)$  et  $E(Y)$ .
4. Calculer les variances  $\text{Var}(X)$  et  $\text{Var}(Y)$ .
5. Calculer deux probabilités conditionnelles :

$$P(X = 1 \mid Y = 2) \quad \text{et} \quad P(Y = 2 \mid X \geq 2).$$

6. Calculer l'espérance  $E(X + Y)$ .
7. Peut-on, pour calculer la variance  $\text{Var}(X + Y)$ , appliquer la formule  $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ ? (Quelle que soit votre réponse, il faut la justifier.)

**Exercice 3** Un groupe de dix personnes est composé de quatre hommes et de six femmes. On choisit dans ce groupe un échantillon de quatre personnes. Déterminer la loi de probabilités du nombre de femmes que l'on peut observer dans un tel échantillon ; calculer son espérance.

**Exercice 4** Soient deux variables indépendantes  $X$  et  $Y$ . Est-il vrai que  $\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) - \text{Var}(Y)$  ?

**Exercice 5** À l'Académie des sciences, il y a des académiciens et des membres-correspondants. Un membre-correspondant est élu académicien. Serait-il possible que l'âge moyen des académiciens et l'âge moyen des membres-correspondants diminuent tous les deux ?

**Exercice 6** On lance une pièce de monnaie 100 fois. Soit  $X$  le nombre de zéros qui sont directement suivis de 1. Trouver l'espérance de  $X$ .

**Exercice 7** Soient  $d_1$  et  $d_2$  les nombres de points sur deux dés, et soit

$$X = d_1 + d_2, \quad Y = d_1 - d_2.$$

1. Montrer que  $X$  et  $Y$  sont *dépendantes*.
2. Montrer que la covariance de  $X$  et  $Y$  est égale à zéro.

**Exercice 8** Soit  $X$  une variable aléatoire,  $P(X = k) = p_k$  pour  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Soit  $f(x) = \sum_{k \geq 0} p_k x^k$  la fonction génératrice des probabilités  $p_k$ . En utilisant la fonction  $f$ , exprimer  $E(X^2)$ , puis  $\text{Var}(X)$ .

**Exercice 9** Soit  $X$  le nombre d'expériences aléatoires jusqu'au premier succès, où la probabilité de succès est égale à  $p$ . Trouver  $\text{Var}(X)$ .

**Exercice 10 (Loi de Poisson)** Pour une loi binomiale, on a

$$p_k = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Supposons que :

- $k$  reste fixe ;
- $n \rightarrow \infty$  ;
- $pn = \lambda$  reste constant (donc, par conséquent,  $p = \lambda/n \rightarrow 0$ ).

Trouver la loi limite pour les probabilités  $p_k$ . Vérifier l'égalité  $\sum_{k \geq 0} p_k = 1$ . Trouver la fonction génératrice pour les probabilités  $p_k$ . Trouver l'espérance et la variance de la loi limite.

**Exercice 11** Un livre de 500 pages contient 50 fautes d'impression. Nous nous intéressons du nombre de fautes sur une page donné.

- Expliquer pourquoi on peut utiliser dans ce problème la loi de Poisson. Avec quel paramètre  $\lambda$  ?
- Calculer la probabilité que le nombre de fautes sur une page est  $\geq 3$ . (Attention, la probabilité sera petite : il faut faire le calcul avec 5 ou 6 chiffres après la virgule.)

**Exercice 12** Soit un graphe  $G$ . Montrer qu'il existe une coloration de ses sommets en deux couleurs, telle qu'au moins une moitié des arêtes aient des extrémités de couleurs opposées.