

Devoir à la maison

17 février 2015. Rendre les copies le 09 mars 2015.

Exercice 1 Soit la suite définie par la récurrence linéaire

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 2, \quad a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 3a_{n-3} \quad \text{pour } n \geq 3.$$

1. Trouver la fonction génératrice pour cette suite.
2. Trouver les fonctions génératrices pour les sous-suites paire a_0, a_2, a_4, \dots et impaire a_1, a_3, a_5, \dots
3. En utilisant ces fonctions génératrices, trouver les récurrences linéaires qui régissent les sous-suites paire et impaire.

Exercice 2 Trouver une interprétation combinatoire, puis démontrer l'égalité suivante :

$$C_n^p \cdot C_p^r \cdot C_{n-p}^{q-r} = C_n^q \cdot C_q^r \cdot C_{n-q}^{p-r}.$$

Exercice 3 Soit $f_k(x)$, $k \geq 0$, la fonction génératrice des chemins de Dyck de la hauteur $\leq k$: le coefficient devant x^n est le nombre de chemins de longueur $2n$. On pose par convention $f_0 = 1$.

1. Calculer $f_1(x)$.
2. Justifier la proposition suivante : tout chemin de Dyck de la hauteur $\leq k$ peut être représenté de manière unique sous forme d'un mot $aUbV$ où U est un chemin de la hauteur $\leq k-1$, et V , un chemin de la hauteur $\leq k$.
3. Montrer que la proposition précédente implique la formule récurrente

$$f_k(x) = \frac{1}{1 - x f_{k-1}(x)}, \quad k \geq 1.$$

4. Calculer les fonctions f_2, f_3, f_4 .
5. Notons $f_k(x) = P_k(x)/Q_k(x)$ où P_k et Q_k sont des polynômes. Montrer la récurrence suivante :

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= Q_k, \\ Q_{k+1} &= Q_k - xQ_{k-1}. \end{aligned}$$

6. Trouver la fonction génératrice des polynômes Q_k :

$$F(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k Q_k(x).$$