

Événements et probabilités

Exercice 1 (Une lettre et huit tiroirs) Un bureau contient 8 tiroirs. Avec la probabilité p , il y a une lettre dans le bureau, et si c'est le cas alors les probabilités de trouver la lettre dans chacun des 8 tiroirs sont égales. On a ouvert 7 tiroirs, et ils sont vides. Quelle est la probabilité que la lettre se trouve dans le 8ème tiroir ?

Exercice 2 (Garçon ou fille ?) 1. Soit deux enfants. L'un est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?

2. Soit deux enfants. L'enfant aîné est une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

Exercice 3 (Divisibilité) Parmi des entiers de 1 à 1001, combien y a-t-il de ceux qui sont divisibles par au moins un des nombres 7, 11 et 13 ?

Exercice 4 (Problème de Monty Hall) Il y a trois portes. Derrière une des portes il y a une voiture ; derrière les deux autres, il n'y a rien. L'animateur du jeu sait où se trouve la voiture, le joueur, bien évidemment, ne le sait pas. Le jeu se déroule en trois étapes :

1. Le joueur montre une des portes mais ne l'ouvre pas.
2. L'animateur ouvre une porte qui n'est ni celle qui contient la voiture, ni celle choisie par le candidat.
3. Le candidat a alors le droit ou bien d'ouvrir la porte qu'il a choisie initialement, ou bien d'ouvrir la troisième porte. S'il y a une voiture derrière cette porte, il la gagne ; sinon, il perd.

Deux stratégies sont possibles :

1. À la 3ème étape, le joueur maintient le choix fait à la 1ère étape.
2. À la 3ème étape, le joueur choisit une autre porte.

Du point de vue du joueur, une de ces stratégies est-elle meilleure que l'autre ?

Exercice 5 (Dernière grâce) Le sort d'un prisonnier doit être décidé par tirage au sort. Il y a 10 boules, 5 noires et 5 blanches, réparties en deux urnes. On choisit d'abord une urne au hasard (probabilités $1/2$ et $1/2$). Puis, on tire une boule de l'urne choisie ; si la boule est noire, la tête du prisonnier sera coupée ; si la boule est blanche, on le relâche.

Le roi accorde une dernière grâce : c'est le prisonnier lui-même qui peut répartir les boules dans les urnes (mais une urne ne peut pas être vide).

Comment le prisonnier doit-il répartir les boules pour maximiser ses chances de survie ?

Exercice 6 (Daltonisme) 5% des hommes et 0.25% des femmes sont daltoniens (ne reconnaissent pas correctement les couleurs). Une personne choisie au hasard souffre du daltonisme. Quelle est la probabilité que ce soit un homme ?

Exercice 7 (Trois tireurs) Un tireur A atteint une cible avec la probabilité 0.6, un tireur B – avec la probabilité 0.5, un tireur C – avec la probabilité 0.4. Ils tirent tous les trois, et 2 balles atteignent la cible. Quel événement est plus probable : que C ait atteint la cible ou qu'il ne l'ait pas atteinte ?

Exercice 8 (Réseau électrique) Soit un réseau électrique montré sur la figure 1. Pendant une année, les éléments A, B, C, D, E tombent en panne d'une manière indépendante avec les probabilités suivantes :

élément	A	B	C	D	E
probabilité	0.1	0.4	0.7	0.5	0.2

Trouver la probabilité que la conductivité entre les deux extrémités du réseau soit coupée.

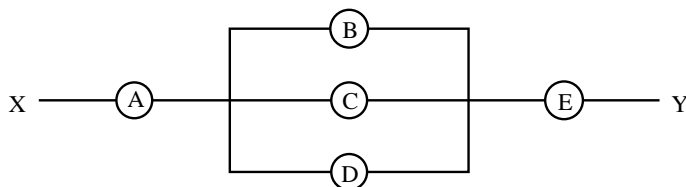


FIGURE 1 – Réseau électrique

Exercice 9 (Couleur des yeux) D'après le recensement de la population en Angleterre en 1891, dans 5% des cas le père a des yeux foncés et le fils aussi, dans 7.9% des cas le père a des yeux foncés et le fils des yeux clairs, dans 8.9% des cas le père a des yeux clairs et le fils foncés, et dans 78.2% des cas le père a des yeux clairs et le fils aussi. Existe-t-il une dépendance entre la couleur des yeux du père et celle du fils ?

Exercice 10 (Un cube inscrit dans une sphère) Il y a une sphère dont 12 % de la surface est colorée en noir, l'autre partie restant blanche. Montrer que, quel que soit le domaine colorié, on peut toujours inscrire un cube dans cette sphère de telle manière que tous les sommets du cube seront blancs. Indication : Qu'est-ce qu'on peut dire à propos de la probabilité d'avoir au moins un sommet noir si le cube est inscrit dans la sphère de manière aléatoire ?