

Probabilités et Combinatoire : Examen

4 mai 2015, 14h00–17h00; durée 3 heures

Sont autorisées : calculatrices de poche; tables de la loi Gaussienne;
une feuille manuscrite recto-verso avec des formules

Responsable : Alexandre Zvonkine

Exercice 1 Quel est le nombre de groupes de 8 personnes que l'on peut former avec 5 garçons et 7 filles si l'on veut qu'ils contiennent obligatoirement 3 garçons

- donnés ?
- seulement ?
- au moins ?

Exercice 2 Montrer l'identité suivante :

$$C_n^p \cdot C_{n-p}^q = C_n^q \cdot C_{n-q}^p.$$

Donner une interprétation combinatoire de cette identité.

Exercice 3 Utiliser la formule de Stirling pour trouver une formule asymptotique pour le coefficient binomial C_{3n}^n . Représenter cette formule asymptotique sous forme

$$C_{3n}^n \sim C \cdot R^n \cdot n^{-\alpha}$$

et trouver explicitement les constantes C , R , α .

Estimer le nombre de chiffres du coefficient binomial C_{3n}^n pour $n = 1000$.

Exercice 4 Soit la suite définie par la récurrence linéaire

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \quad \text{pour } n \geq 2.$$

Trouver la fonction génératrice pour cette suite.

Exercice 5 Équation de Pell est l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ qu'il faut résoudre en nombres entiers positifs. Montrer que si (x_n, y_n) est une solution de cette équation, alors (x_{n+1}, y_{n+1}) obtenue par la récursion suivante

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

est aussi une solution.

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

On admet sans preuve que toutes les solutions de l'équation de Pell s'obtiennent de cette manière à partir de la solution initiale $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

1. Trouver les solutions (x_1, y_1) , (x_2, y_2) et (x_3, y_3) et vérifier qu'elles soient effectivement des solutions.
2. Proposer un algorithme efficace pour trouver une n -ème solution.

Exercice 6 Il y a trois urnes A , B et C . L'urne A contient 2 boules blanches et 5 boules noires ; l'urne B contient 3 boules blanches et 3 boules noires ; l'urne C contient 5 boules blanches et 3 boules noires. On choisit au hasard une des trois urnes, puis, toujours au hasard, on tire deux boules à partir de l'urne choisie. Le résultat du tirage est : une boule blanche et une boule noire. Quelle est la probabilité que l'urne choisie ait été A ? La même question pour les urnes B et C .

Exercice 7 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et réparties selon la loi uniformes sur le segment $[0, 1]$. Trouver la probabilité conditionnelle

$$P\left(Y \leq \frac{X}{2} \mid Y \geq X - \frac{1}{2}\right).$$

Exercice 8 Soit X une variable aléatoire continue de densité

$$\varphi(x) = \begin{cases} a(x^2 - 1)^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Dessiner le graphe de la fonction $\varphi(x)$. Quelle doit être la valeur du paramètre a pour que φ soit vraiment une densité ?
Dans la suite, on suppose que a prend cette valeur.
2. Calculer l'espérance $E(X)$.
3. Calculer la variance $\text{Var}(X)$.

Exercice 9 Un graphe aléatoire avec 50 sommets est construit de la manière suivante : pour toute paire (i, j) de sommets, on trace une arête entre i et j avec la probabilité $1/5$, et avec la probabilité $4/5$ les sommets i et j restent non connectés par une arête. Quelle est la probabilité que le nombre d'arêtes de ce graphe se trouve entre 240 et 256 ?

Exercice 10 On fait des expériences indépendantes avec la probabilité de succès $p = 1/10$. On les répète jusqu'à ce que l'on obtient 100 succès. Quelle est la probabilité que le nombre d'expériences ne dépasse pas 1050 ?

FIN DE L'ÉNONCÉ