

Fonctions génératrices

Exercice 1 Soit la suite définie par la récurrence linéaire

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2} \quad \text{pour } n \geq 2.$$

1. Trouver une fonction génératrice pour cette suite.
2. Trouver les fonctions génératrices pour les sous-suites paire a_0, a_2, a_4, \dots et impaire a_1, a_3, a_5, \dots .
3. En utilisant ces fonctions génératrices, trouver les récurrences linéaires qui régissent les sous-suites paire et impaire.

Exercice 2 En utilisant la série binomiale $(1 - 4x)^{1/2}$ et la fonction génératrice des nombres de Catalan, trouver une formule explicite pour les nombres de Catalan.

Remarque. Pour trouver le n ème nombre de Catalan, il nous faut le $(n + 1)$ ème coefficient de la série binomiale (pourquoi?).

Exercice 3 En utilisant la formule de Stirling, trouver une formule asymptotique pour les nombres de Catalan.

Exercice 4 On fait des expériences aléatoires indépendantes avec la probabilité de succès égale à p et la probabilité d'échec égale à $q = 1 - p$. Soit X le nombre d'expériences jusqu'au premier succès.

1. Trouver les probabilités que X soit égale à $1, 2, 3, \dots, k, \dots$
2. Trouver l'espérance (la moyenne) de la variable aléatoire X .

Exercice 5 (Polynômes de Chebyshev) Polynômes de Chebyshev sont des polynômes $T_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ qui expriment $\cos n\varphi$ en fonction de $\cos \varphi$, à savoir, $\cos n\varphi = T_n(\cos \varphi)$.

1. Montrer les récurrence

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \quad \text{pour } n \geq 2.$$

Indication. Écrire les formules pour $\cos(\alpha + \beta)$ et $\cos(\alpha - \beta)$, puis prendre $\alpha = (n - 1)\varphi$ et $\beta = \varphi$.

2. Calculer les polynômes T_n pour $n = 2, 3, 4, 5$.
3. Trouver la fonction génératrice $f(t, x) = \sum_{n \geq 0} t^n T_n(x)$.

4. (Optionnel) Dessiner les représentations graphiques des polynômes $T_n(x)$ sur le segment $[-1, 1]$.

Exercice 6 (Nombres de Motzkin) Les *chemins de Motzkin* de longueur n sont les chemins qui relient le point $(0, 0)$ au point $(n, 0)$ en utilisant, en plus des pas Nord-Est et Sud-Est, les pas Est (les pas horizontaux) et qui se trouvent entièrement au-dessus de l'axe horizontal. Les chemins de Motzkin peuvent être codés par des *mots de Motzkin* qui, à part des lettres a et b , utilisent la lettre c pour coder les pas horizontaux. Les *nombres de Motzkin* m_n comptent le nombre de chemins (et de mots) de Motzkin de longueur n .

1. Dessiner et compter les chemins de Motzkin de longueur jusqu'à 4.
2. Écrire une grammaire algébrique qui engendre les mots de Motzkin.
3. Trouver une formule récurrente pour les nombres de Motzkin. Calculer m_5 et m_6 .
4. Écrire une équation pour la fonction génératrice des nombres de Motzkin et trouver cette fonction.