

Nombres de Ramsey (une preuve probabiliste d'existence)

L'objectif de ce sujet est de démontrer l'*existence* de quelque chose, sans pour autant construire ce « quelque chose » explicitement. Une preuve consiste à montrer que la probabilité (selon une certaine loi probabiliste) d'obtenir un objet voulu est non nulle. Cette preuve conduit à un algorithme probabiliste qui construit un objet en question.

Exercice 1

1. Trouver une coloration des arêtes du graphe complet K_5 en deux couleurs, rouge et bleue, telle qu'il n'y aurait pas de triangle rouge ni de triangle bleu.

2. Montrer que, quelle que soit une coloration des arêtes du graphe complet K_6 , il existe toujours soit un triangle rouge, soit un triangle bleu (soit les deux).

Attention! On colorie les arêtes, pas les sommets.

Remarque. Si au lieu des graphes K_5 et K_6 on prend n'importe quel graphe G alors le problème de recherche d'une coloration des arêtes sans triangle monochromatique est NP-complet. (Le terme « monochromatique » veut dire, soit entièrement rouge, soit entièrement bleu).

Définition. Soit un graphe G et un entier $k \geq 3$. Un sous-graphe complet à k sommets dans le graphe G s'appelle une *clique* de taille k .

On colorie les arêtes du graphe complet K_n en deux couleurs, rouge et bleue, et on cherche une clique monochromatique C_k de taille k .

Le plus petit entier $n = R(k)$ tel que, quelle que soit une coloration des arêtes de K_n , il existe toujours au moins une clique C_k monochromatique, s'appelle *nombre de Ramsey*.

Nous venons de montrer que $R(3) = 6$ (voir la 2ème question de l'exercice 1).

Très peu de choses sont connues sur les nombres de Ramsey. On sait que $R(4) = 18$, mais déjà la valeur exacte de $R(5)$ est inconnue. On sait seulement que $43 \leq R(5) \leq 49$. Les bornes pour $R(6)$ sont $102 \leq R(6) \leq 165$.

Les exercices qui suivent donnent une borne inférieure pour les nombres de Ramsey. Ils montrent que si $k \geq 4$, on a $R(k) > 2^{k/2}$. En d'autres termes, pour tout $n \leq 2^{k/2}$ il existe une coloration des arêtes du graphe K_n en rouge et bleu telle qu'il n'y ait pas de clique monochromatique C_k .

Pour cela, pour chaque arête e du graphe K_n , on décide grâce à une expérience aléatoire si e est rouge ou bleue. Ces expériences sont effectuées de façon indépendante et la probabilité qu'une arête soit rouge (ou bleue) est $1/2$.

Exercice 2 Soit A un sous-ensemble des sommets du graphe K_n , $|A| = k$. Notons C_A une clique dont les sommets appartiennent à A .

Calculer les probabilités des événements «la clique C_A est toute rouge» et «la clique C_A est toute bleue».

Exercice 3 Proposer une *majoration* pour la probabilité de l'événement suivant : «il existe un sous-ensemble de sommets A de taille k tel que la clique C_A soit monochromatique».

Exercice 4 Lemme technique : montrer que pour $k \geq 4$ on a $C_n^k \leq n^k/2^k$.

Exercice 5 Soit un $k \geq 4$ et $n \leq 2^{k/2}$. Montrer que la probabilité de l'événement «il existe une clique monochromatique C_k » soit strictement inférieure à 1.

Faire une conclusion quant à l'existence d'une coloration sans clique monochromatique à k sommets, et la justifier.

Nous venons donc de démontrer une existence d'une coloration des arêtes du graphe K_n n'ayant aucune clique C_k monochromatique, sans pour autant donner une méthode de construction d'une telle coloration.

Exercice 6

1. Proposer un algorithme probabiliste de construction d'une telle coloration.

2. Estimer la complexité en moyenne de cet algorithme. (Attention ! Il y a un petit piège dans cette question.)

3. Comparer avec l'algorithme «brute force» qui propose de passer en revue toutes les colorations possibles. Lequel des deux algorithmes est plus avantageux ?