

Réurrences

Exercice 1 Soit une suite définie par la récurrence suivante :

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1.$$

Calculer quelques premières valeurs de a_n . Deviner une formule explicite. Démontrer cette formule.

Exercice 2 Soit un arbre binaire de recherche de la hauteur n , où la hauteur est le nombre des niveaux des nœuds. Quel est le plus grand nombre de nœuds qu'un tel arbre puisse contenir ?

Donner une borne inférieure pour le nombre de questions « à réponse binaire » qu'il faut poser pour trouver un élément parmi N .

Exercice 3 (Nombres de Fibonacci) Soit une suite définie par la récurrence suivante :

$$f_0 = f_1 = 1, \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1}.$$

Calculer quelques premières valeurs de f_n . Observer le comportement du rapport f_{n+1}/f_n . En supposant qu'il existe une limite

$$\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n},$$

trouver une équation pour φ . Résoudre cette équation.

Exercice 4 On dit qu'un arbre binaire de recherche est *bien équilibré* si, quel que soit un nœud d'un tel arbre, la différence entre les hauteurs des sous-arbres gauche et droit attachés à ce nœud est au plus 1. Quel est le plus petit nombre de nœuds qu'un arbre bien équilibré de la hauteur n puisse contenir ?

Donner une borne supérieure pour le nombre de questions « à réponse binaire » qu'il faut poser pour trouver un élément parmi N si les éléments de l'ensemble sont stockés dans les nœuds d'un arbre bien équilibré.

Exercice 5 (Nombres de Catalan) Soit une suite définie par la récurrence suivante :

$$c_0 = 1, \quad c_{n+1} = \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k}.$$

Calculer quelques premières valeurs de c_n .

Exercice 6 (Langage de Dyck) Soit un langage algébrique sur l'alphabet $\{a, b\}$ engendré par la grammaire suivante :

$$D \rightarrow \varepsilon | aDbD.$$

Montrer que le nombre des mots de longueur $2n$ du langage de Dyck est égal au nombre de Catalan c_n .

Exercice 7 Montrer par induction que

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$

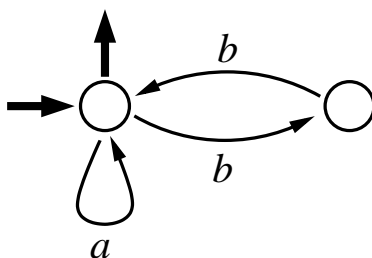
Exercice 8 En combien de morceaux divisent le plan n lignes droites en position générale? (La «position générale» veut dire qu'il n'y ait pas de deux lignes parallèles, et il n'y ait pas de trois lignes qui passeraient par le même point.)

Indication : trouver une récurrence.

Exercice 9 De combien de façons peut-on paver par des dominos une bande de largeur 2 et de longueur n ?

Dessiner tous les pavages pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Exercice 10 Combien de mots de longueur n accepte l'automate suivant?



Exercice 11 Trouver une plus petite paire d'entiers a, b , $a \geq b$, pour laquelle l'application de l'algorithme d'Euclide nécessite k opérations de division.

Montrer comment le résultat précédent implique une estimation de la complexité de l'algorithme d'Euclide.

Exercice 12 Trouver toutes les permutations de longueurs 3 et 4 qui ne contiennent pas de sous-mot de type acb où $a < b < c$.