

## TD — feuille 2

### Variables aléatoires

**Exercice 1** On lance deux dés, et on obtient les résultats  $d_1$  et  $d_2$ . Notons  $d = \min(d_1, d_2)$ .

- Calculer les probabilités des événements  $d = 1, d = 2, \dots, d = 6$ .
- Calculer l'espérance de la variable  $d$ .
- Calculer la variance de  $d$ .
- Calculer les probabilités conditionnelles

$$P(d_1 = 6 | d = 3), \quad P(d = 3 | d_1 = 6).$$

**Exercice 2** Soient deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  prenant les valeurs 1, 2, 3. Les probabilités que  $(X, Y) = (i, j)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  sont indiquées dans la table suivante :

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$	$7/45$	$2/45$	$6/45$
$X = 2$	$4/45$	$5/45$	$3/45$
$X = 3$	$1/45$	$8/45$	$9/45$

1. Pour la variable  $X$ , quelles sont les probabilités que  $X = 1, X = 2, X = 3$ ?  
La même question pour la variable  $Y$ .
2. Les variables  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?
3. Calculer les espérances  $E(X)$  et  $E(Y)$ .
4. Calculer les variances  $\text{Var}(X)$  et  $\text{Var}(Y)$ .
5. Calculer deux probabilités conditionnelles :  $P(X = 1 | Y = 2)$ , et  $P(Y = 2 | X \geq 2)$ .
6. Calculer l'espérance  $E(X + Y)$ .
7. Peut-on, pour calculer la variance  $\text{Var}(X + Y)$ , appliquer la formule  $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ ? (Quelle que soit votre réponse, il faut la justifier.)

**Exercice 3** Un livre de 500 pages contient 50 fautes d'impression. Nous nous intéressons du nombre de fautes sur une page donné.

- Expliquer pourquoi on peut utiliser dans ce problème la loi de Poisson. Avec quel paramètre  $\lambda$  ?
- Calculer la probabilité que le nombre de fautes sur une page est  $\geq 3$ . (Attention, la probabilité sera petite : il faut faire le calcul avec 5 ou 6 chiffres après la virgule.)

**Exercice 4** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes et distribuées selon la loi uniforme sur le segment  $[0, 1]$ . Pour la variable aléatoire  $Z = X + Y$  trouver :

- la fonction de répartition  $F_Z(x) = \text{Prob}(Z < x)$  ;
- la densité  $\varphi_Z(x) = F'_Z(x)$  ;
- l'espérance  $E(Z)$  ;
- la variance  $\text{Var}(Z)$ .

Pour l'espérance et la variance proposer deux méthodes de calcul et comparer les résultats.

**Exercice 5** Vous disposez d'une source de bits aléatoires qui retourne 1 avec la probabilité  $p$ , et 0 avec la probabilité  $1 - p$ . La probabilité  $p$  est inconnue mais on sait que  $1/4 < p < 3/4$ . Proposer un algorithme qui retourne les bits aléatoires 0 et 1 avec les probabilités  $1/2$  et  $1/2$ . Combien de fois en moyenne votre algorithme s'adresse-t-il à la source initiale pour retourner un bit ?