

TD — feuille 2

Variables aléatoires

Exercice 1 On lance deux dés, et on obtient les résultats d_1 et d_2 . Notons $d = \min(d_1, d_2)$.

- Calculer les probabilités des événements $d = 1, d = 2, \dots, d = 6$.
- Calculer l'espérance de la variable d .
- Calculer la variance de d .
- Calculer les probabilités conditionnelles

$$P(d_1 = 6 | d = 3), \quad P(d = 3 | d_1 = 6).$$

Exercice 2 Soient deux variables aléatoires X et Y prenant les valeurs 1, 2, 3. Les probabilités que $(X, Y) = (i, j)$, $i, j = 1, 2, 3$ sont indiquées dans la table suivante :

	$Y = 1$	$Y = 2$	$Y = 3$
$X = 1$	$7/45$	$2/45$	$6/45$
$X = 2$	$4/45$	$5/45$	$3/45$
$X = 3$	$1/45$	$8/45$	$9/45$

1. Pour la variable X , quelles sont les probabilités que $X = 1, X = 2, X = 3$?
La même question pour la variable Y .
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
3. Calculer les espérances $E(X)$ et $E(Y)$.
4. Calculer les variances $\text{Var}(X)$ et $\text{Var}(Y)$.
5. Calculer deux probabilités conditionnelles : $P(X = 1 | Y = 2)$, et $P(Y = 2 | X \geq 2)$.
6. Calculer l'espérance $E(X + Y)$.
7. Peut-on, pour calculer la variance $\text{Var}(X + Y)$, appliquer la formule $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$? (Quelle que soit votre réponse, il faut la justifier.)

Exercice 3 Un livre de 500 pages contient 50 fautes d'impression. Nous nous intéressons du nombre de fautes sur une page donné.

- Expliquer pourquoi on peut utiliser dans ce problème la loi de Poisson. Avec quel paramètre λ ?
- Calculer la probabilité que le nombre de fautes sur une page est ≥ 3 . (Attention, la probabilité sera petite : il faut faire le calcul avec 5 ou 6 chiffres après la virgule.)

Exercice 4 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et distribuées selon la loi uniforme sur le segment $[0, 1]$. Pour la variable aléatoire $Z = X + Y$ trouver :

- la fonction de répartition $F_Z(x) = \text{Prob}(Z < x)$;
- la densité $\varphi_Z(x) = F'_Z(x)$;
- l'espérance $E(Z)$;
- la variance $\text{Var}(Z)$.

Pour l'espérance et la variance proposer deux méthodes de calcul et comparer les résultats.

Exercice 5 Vous disposez d'une source de bits aléatoires qui retourne 1 avec la probabilité p , et 0 avec la probabilité $1 - p$. La probabilité p est inconnue mais on sait que $1/4 < p < 3/4$. Proposer un algorithme qui retourne les bits aléatoires 0 et 1 avec les probabilités $1/2$ et $1/2$. Combien de fois en moyenne votre algorithme s'adresse-t-il à la source initiale pour retourner un bit ?