

## TD — feuille 4 : Applications du théorème central limite

**Méthode.** Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes ayant la même distribution, et notons  $E(X_i) = m$ ,  $\text{Var}(X_i) = \sigma^2$ . Alors la distribution de la variable

$$X = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n \cdot m}{\sigma \sqrt{n}}$$

est approximativement Gaussienne, avec l'espérance 0 et la variance 1. Diverses probabilités concernant la variable  $X$  peuvent être trouvées dans la table distribuée en cours. L'usage des calculatrices est conseillé.

\* \* \*

**Exercice 1** La probabilité pour qu'un bébé nouveau-né soit un garçon est 0.515. Quelle est la probabilité que sur 10 000 nouveaux-nés plus de la moitié soit des garçons ?

**Exercice 2** Un tireur touche :

10	avec la probabilité	0.5,
9	avec la probabilité	0.3,
8	avec la probabilité	0.1,
7	avec la probabilité	0.05,
6	avec la probabilité	0.05.

Il tire 100 fois. Quelle est la probabilité qu'il obtient  $\geq 980$  points ?  $\geq 950$  points ?

**Exercice 3** Au 16ème siècle, quand il n'y avait pas d'unités de mesure standards, dans certains endroits on déterminait la mesure *foot* par la procédure suivante : un dimanche, on mesurait les pieds des 16 premiers hommes qui sortaient de l'église et on calculait la moyenne de la longueur de leurs pieds. Plus tard on a établi que longueur moyenne d'un pied d'homme est égale à  $m = 262.5$  mm, avec un écart-type  $\sigma = 12$  mm.

1. Quelle est la probabilité que deux mesures obtenues pendant deux dimanches diffèrent de 5 mm ou plus ?
2. Combien d'hommes faudrait-il pour que, avec la probabilité 0.99, cette différence ne dépasse pas 0.5 mm ?

Indication : La somme, ainsi que la différence de deux variables Gaussiennes indépendantes est distribuée selon la loi Gaussienne.

**Exercice 4** Un vendeur de journaux vend ses journaux dans la rue. La probabilité pour qu'un passant achète un journal est de  $1/3$ . Quelle est la probabilité pour que le nombre de passants nécessaires pour vendre 100 journaux ne dépasse pas 270 ?

Indication : Les variables aléatoires à sommer sont les variables  $X_i$  qui représentent le nombre de passants entre le  $(i - 1)$ -ème achat et le  $i$ -ème achat,  $i = 1, 2, \dots, 100$  ; ces variables sont distribuées selon la loi géométrique de paramètre  $p = 1/3$  ; pour la loi géométrique  $m = 1/p$ ,  $\sigma^2 = (1 - p)/p^2$ .

**Exercice 5** Pour une personne de 20 ans, la probabilité de mourir pendant la 21ème année de sa vie est 0.006. Il y a 10 000 personnes de 20 ans qui ont acheté une assurance-vie. Cette assurance coûte 12 euros ; en cas de décès d'une personne assurée sa famille touche 1000 euros. Quelle est la probabilité qu'un an plus tard la compagnie d'assurance affiche une perte ? Que la compagnie d'assurance gagne plus de 60 000 euros ? Qu'elle gagne plus de 50 000 euros ?

**Exercice 6** Trouver les bornes entre lesquelles se trouve, avec la probabilité 0.99, la somme des points de 1000 jets indépendants d'un dé.