

Programmation linéaire

Exercice 1. Résoudre le système suivant d'abord graphiquement, puis par l'algorithme du simplexe :

$$\begin{array}{rcll}
 & & x & \geq 0 \\
 3x_1 & + & 2x_2 & \leq 18 \\
 x_1 & + & 2x_2 & \leq 14 \\
 3x_1 & - & x_2 & \leq 9 \\
 3x_1 & + & x_2 & = z \rightarrow \max
 \end{array}$$

Exercice 2. Résoudre le problème suivant : Une firme fabrique deux produits A et B à l'aide de matières premières I, II et III. Les besoins en ressources, bénéfiques et quantités disponibles sont donnés par le tableau suivant :

	A	B	Quantité
I	2	1	8
II	1	2	7
III	0	1	3
profit	4	5	

Résoudre le problème d'abord graphiquement, puis par l'algorithme du simplexe, en suivant l'évolution de toutes les variables sur le graphe.

Exercice 3. Mettre sous forme standard le programme (P) suivant :

$$\begin{array}{rcll}
 & & x & \geq 0 \\
 2x_1 & - & x_2 & - 5x_3 \leq 2 \\
 x_1 & + & 3x_2 & - x_3 \geq 1 \\
 x_1 & + & 2x_2 & - 3x_3 = 1 \\
 x_1 & + & 2x_2 & + 3x_3 = z \rightarrow \max
 \end{array}$$

Exercice 4. Deux types de pétroles légers PL1 et PL2 sont produits dans une raffinerie en quantités respectives de 30 et 70 tonnes par jour. PL1 a un taux d'octane de 104 et PL2 de 94. Ces pétroles légers peuvent être mélangés dans n'importe quelles proportions. Le taux d'octane du mélange varie linéairement avec les taux d'octane des parties constituant le mélange. Par exemple, un mélange de 2 tonnes de PL1 et 3 tonnes de PL2 pèse 5 tonnes et a un taux d'octane de $(2 \cdot 104 + 3 \cdot 94)/5 = 98$.

De tels mélanges peuvent être vendus sur le marché sous le nom de *Kérosène* si le taux d'octane est supérieur ou égal à 102 et sous le nom de *Super* si le taux d'octane est supérieur ou égal à 96. La demande maximum de Kérosène est de 20 tonnes/jour et celle de Super n'est pas limitée. La vente d'une tonne de Kérosène rapporte 15 euros et celle d'une tonne de Super 10 euros.

Formuler le problème de maximisation du profit sous forme d'un programme linéaire.

Exercice 5. Trouver une *solution graphique* du système suivant, puis appliquer la méthode du simplexe.

$$\begin{array}{rcccccl} & & & & x & \geq & 0 \\ x_1 & & & & & \leq & 5 \\ & x_2 & & & & \leq & 5 \\ & & x_3 & & & \leq & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 12 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & z \rightarrow \max \end{array}$$

Exercice 6. Résoudre par l'algorithme du simplexe :

$$\begin{array}{rcccccl} & & & & x & \geq & 0 \\ 4x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 \leq 44 \\ 8x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 \leq 36 \\ 5x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & + & 2x_4 = z \rightarrow \max \end{array}$$

Exercice 7. Résoudre par l'algorithme du simplexe :

$$\begin{array}{rcccccl} & & & & x & \geq & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 + 4x_5 \leq 10 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 + x_5 \leq 16 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 7x_3 & + & 8x_4 + 6x_5 = z \rightarrow \max \end{array}$$

Vérifier la solution obtenue par le théorème des écarts complémentaires.

Exercice 8. On considère un programme linéaire (P) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 10 \\ (2) \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 16 \\ (3) \quad 9x_1 + 12x_2 + 10x_3 + 7x_4 = z \rightarrow \max \end{array} \right.$$

En utilisant la combinaison linéaire $(3) - 3 \cdot (1) - 2 \cdot (2)$, montrer que la valeur de la fonction objective de (P) ne peut dépasser 62. Montrer que $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = 4$, $x_4 = 2$ est une solution optimale de (P).

Soit $y_1 \geq 0$ et $y_2 \geq 0$. Calculer $(3) - y_1 \cdot (1) - y_2 \cdot (2)$ et montrer que si les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{l} 2y_1 + 2y_2 \geq 9 \\ 2y_1 + 3y_2 \geq 12 \\ 3y_1 + y_2 \geq 10 \\ y_1 + 2y_2 \geq 7 \end{array} \right.$$

sont vérifiées, alors la valeur de la fonction objective de (P) est inférieure ou au plus égale à $10y_1 + 16y_2$.

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Soit $x \geq 0$ un vecteur-colonne de taille n qui vérifie le système d'inégalités $Ax \leq b$, où b est aussi un vecteur-colonne de taille n . Soit $y \geq 0$ un vecteur-ligne de taille m qui vérifie le système d'inégalités $yA \geq c$, où c est aussi un vecteur-ligne de taille m .

Montrer que $cx \leq yb$.