

# Recherche Opérationnelle 2

Exercices préparatoires à l'examen d'avril-mai 2016

## 1 Plus courts chemins

**Exercice 1.1** Trouver les plus courts chemins du sommet  $s$  à tous les autres sommets du graphe de la figure 1. Dessiner l'arbre des plus courts chemins. Quel algorithme faut-il utiliser, et pourquoi ?

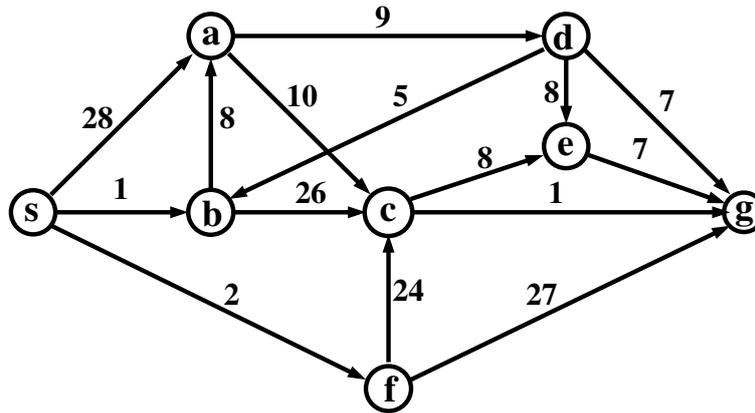


FIGURE 1 – Trouver les plus courts chemins ; dessiner l'arbre des plus courts chemins.

**Exercice 1.2** Trouver les plus courts chemins du sommet  $a$  à tous les autres sommets du graphe de la figure 2. Dessiner l'arbre des plus courts chemins. Quel algorithme faut-il utiliser, et pourquoi ?

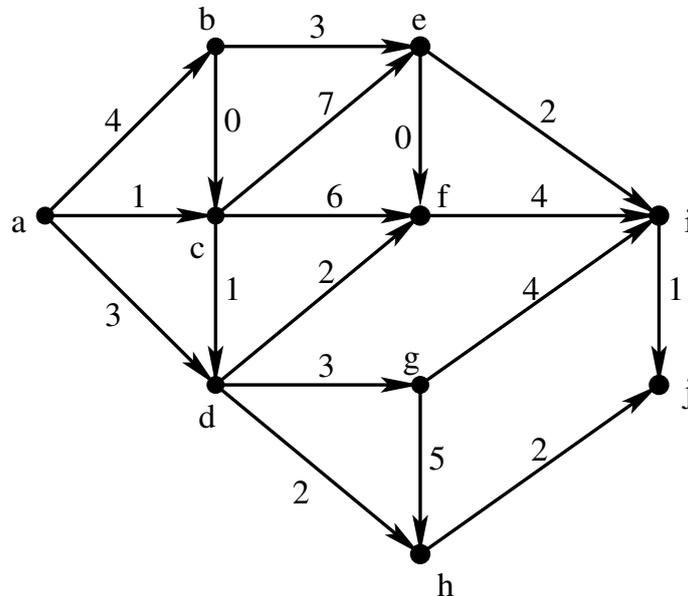


FIGURE 2 – Trouver les plus courts chemins ; dessiner l'arbre des plus courts chemins.

**Exercice 1.3**

1. Déterminer un plus court chemin de  $s$  à  $t$  dans le graphe de la figure 3.
2. Associer à chaque arc du plus court chemin trouvé ci-dessus la quantité dont la plus courte distance de  $s$  à  $t$  augmenterait si on supprimait cet arc du graphe.
3. Donner un second plus court chemin de  $s$  à  $t$ .

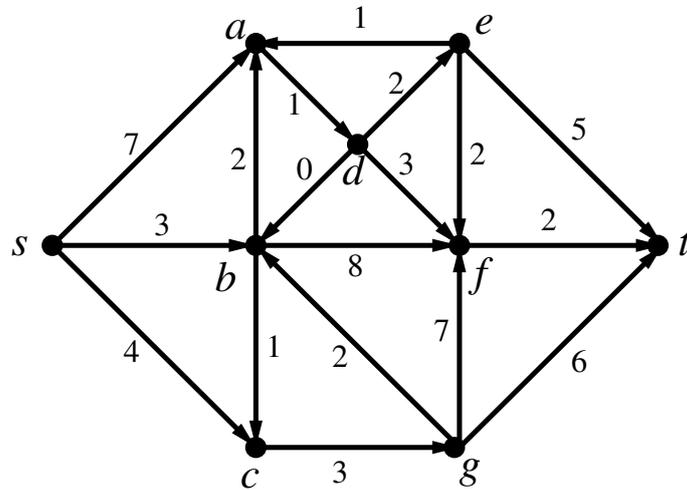


FIGURE 3 – Un plus court chemin et un second plus court chemin de  $s$  à  $t$ .

**Exercice 1.4** Trouver les plus courts chemins de tout sommet à tout autre sommet du graphe de la figure 4. Donner la matrice des distances entre les sommets. (Attention, certaines distances peuvent être infinies.)

Vous pouvez faire cet exercice “à la main”, sans utiliser un quelconque algorithme spécifique.

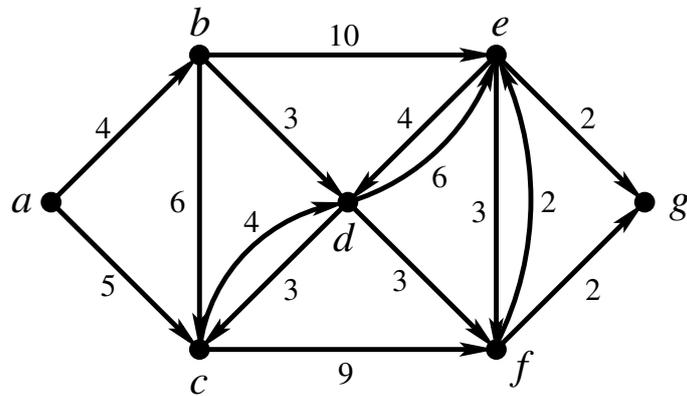


FIGURE 4 – Trouver les plus courts chemins de tout sommet à tout autre.

**Exercice 1.5** Trouver les plus courts chemins du sommet  $s$  à tous les autres sommets du graphe de la figure 5. Dessiner l'arbre des plus courts chemins. Quel algorithme faut-il utiliser, et pourquoi ?

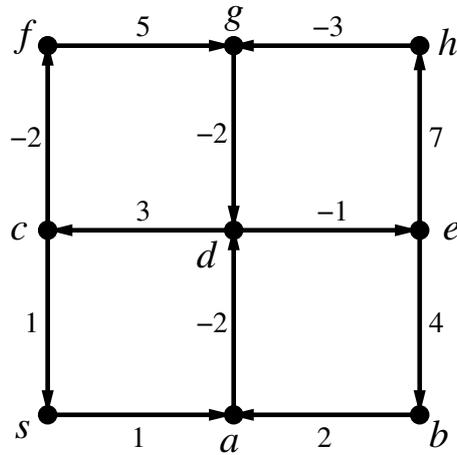


FIGURE 5 – Trouver les plus courts chemins ; dessiner l'arbre des plus courts chemins.

**Exercice 1.6** Trouver les plus courts chemins du sommet  $s$  à tous les autres sommets du graphe de la figure 6. Dessiner l'arbre des plus courts chemins. Indiquer les distances de  $s$  aux autres sommets.

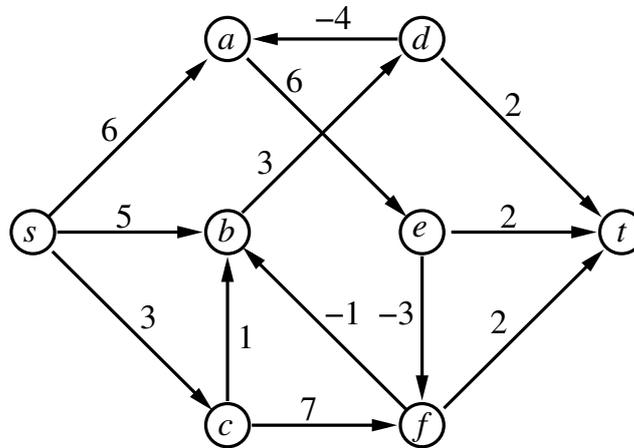


FIGURE 6 – Plus courts chemins

## 2 Flots

**Exercice 2.1** Trouver le flot maximum et une coupe minimum entre les sommets  $s$  et  $t$  dans le réseau de la figure 7. La liste des chemins améliorants doit être présenté en ordre décroissant des valeurs.

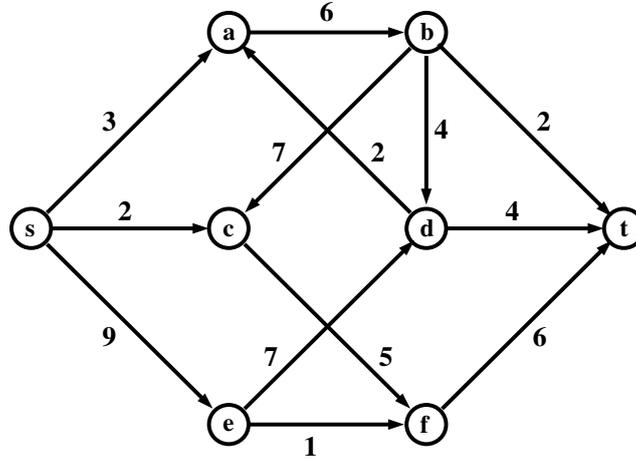


FIGURE 7 – Trouver un flot maximum et une coupe minimum.

**Exercice 2.2** La figure 1 représente un réseau routier. Les nombres sur les arcs sont les capacités des routes (en milliers de voitures par heure).

1. En utilisant l'algorithme de Ford–Fulkerson, trouver le trafic maximum entre les villes  $s$  et  $t$ .
2. Justifier la réponse, en exhibant une coupe minimum.
3. On souhaite augmenter la capacité du réseau. Les propositions suivantes sont discutées :
  - augmenter la capacité de l'arc  $ac$  en élargissant la route correspondante ;
  - augmenter de la même manière la capacité de l'arc  $ad$  ;
  - construire une nouvelle route  $cd$  ;
  - construire une nouvelle route  $gf$ .

Quelle serait votre préférence ?

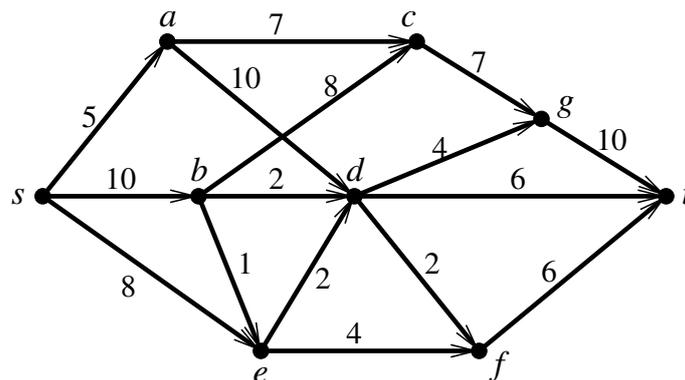


FIGURE 8 – Un réseau routier

**Exercice 2.3** La figure 9 représente un réseau avec trois sommets sources  $a, b, c$  et trois sommets destinations  $l, m, n$ . Trouver le flot maximum entre les sources et les destinations. Exhiber une coupe minimum.

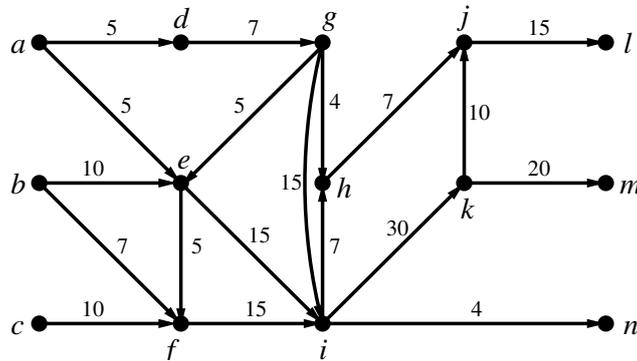


FIGURE 9 – Trois sources et trois destinations.

**Exercice 2.4** Trouver des chemins améliorants et le flot maximum du sommet  $s$  au sommet  $t$  du graphe de la figure 10. Trouver une coupe minimum.

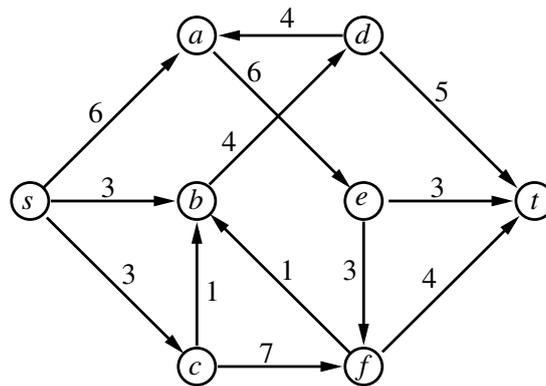


FIGURE 10 – Flot

**Exercice 2.5** Soit le graphe donné sur la figure 11. On cherche, dans ce graphe, le nombre maximum de chemins de  $s$  à  $t$  que l'on peut trouver, disjoints au sens des arcs (c'est-à-dire, tels qu'un arc appartient au plus à un chemin retenu). Réduire ce problème à un problème de flot maximum. Trouver les chemins en question et montrer qu'il n'y en a pas plus que cela.

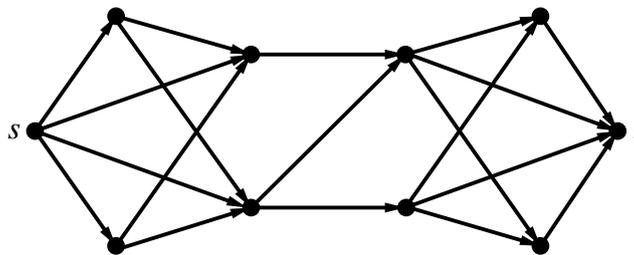


FIGURE 11 – Chemins arc-disjoints.

### 3 Divers

**Exercice 3.1** Appliquer la procédure de tri topologique au graphe de la figure 12. À savoir, numéroter ses sommets de telle sorte que s'il existe un chemin orienté d'un sommet  $x$  à un sommet  $y$ , alors le numéro de  $x$  doit être inférieur à celui de  $y$ .

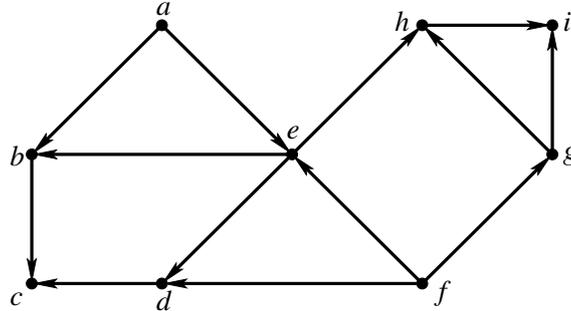


FIGURE 12 – Appliquer la procédure de tri topologique.

**Exercice 3.2** Montrer que le graphe de la figure 13 est planaire. Cela veut dire qu'*il est possible* de dessiner ce graphe sur le plan de telle manière que ses arêtes ne se coupent pas.

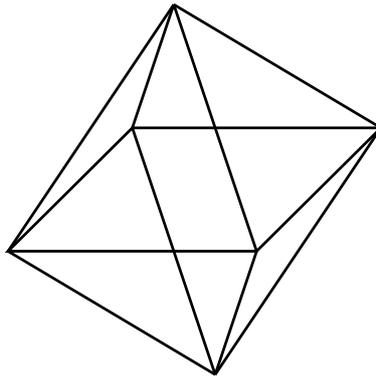


FIGURE 13 – Montrer que ce graphe est planaire.

**Exercice 3.3** Montrer que le graphe de la figure 14 est planaire. Cela veut dire qu'*il est possible* de dessiner ce graphe sur le plan de telle manière que ses arêtes ne se coupent pas.

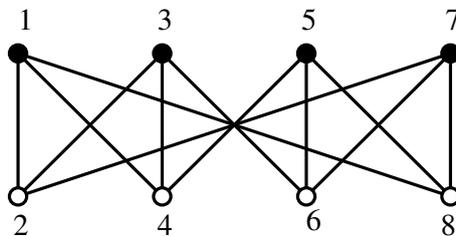


FIGURE 14 – Montrer que ce graphe est planaire.