

Université de Bordeaux I
Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

au titre de l'école doctorale de Mathématiques et Informatique de Bordeaux

soutenue et présentée publiquement le 20 novembre 2008

par Monsieur Philippe DUCHON

Combinatoire des configurations de boucles compactes

après avis des rapporteurs :

Monsieur Philippe Di Francesco,	Ingénieur de recherche au CEA
Monsieur Philippe Flajolet,	Directeur de recherche à l'INRIA Rocquencourt
Monsieur Christian Krattenthaler,	Professeur à Universität Wien

devant la commission d'examen formée de :

Monsieur Robert Cori,	Président,	Professeur à l'Université Bordeaux 1
Monsieur Philippe Di Francesco,	Rapporteur,	Ingénieur de recherche au CEA
Monsieur Philippe Flajolet,	Rapporteur,	Directeur de recherche à l'INRIA Rocquencourt
Monsieur Jean Mairesse,	Examineur,	Directeur de recherche au CNRS
Monsieur Yves Métivier,	Examineur,	Professeur à l'ENSEIRB
Monsieur Xavier Viennot,	Examineur,	Directeur de recherche au CNRS

Remerciements

Ce mémoire doit beaucoup à Xavier Viennot, dont les cours de combinatoire énumérative, il y a près de vingt ans, ont scellé mon sort de futur combinatoriste. C'est également Xavier qui, plus récemment, m'a contaminé avec le virus des configurations de boucles compactes. Je suis donc doublement heureux qu'il ait accepté de participer à ce jury, et je l'en remercie profondément.

Je ne doute pas, connaissant sa réputation, que Robert Cori, si je m'étais trouvé élève d'une autre école, aurait été également inspirant. J'ai toujours pris plaisir à travailler à ses côtés, et je le remercie d'avoir bien voulu présider ce jury.

Philippe Flajolet est, en plus d'être un scientifique hors pair, un modèle de disponibilité et de gentillesse ; il n'a donc pas su refuser d'être rapporteur de cette habilitation, et je lui en suis très reconnaissant.

Philippe Di Francesco et Christian Krattenthaler ont également accepté de rapporter sur ce travail, dont j'espère qu'il leur aura appris une petite proportion de ce que leurs propres travaux m'ont apporté. Je leur en suis également reconnaissant.

Mireille Bousquet-Mélou, Jean-François Marckert, Jean-Christophe Aval, Jean Bétréma et tous les collègues du groupe de combinatoire énumérative, ainsi que toute la "bande Cépage", font au quotidien que la recherche soit un plaisir, et pour cela, je ne les remercierai jamais assez. Les collègues du département Informatique de l'ENSEIRB supportent avec grâce que je dessine des labyrinthe dès la fin des réunions de département, et je les en remercie tout autant.

Encore un grand merci à mes parents, et le plus grand de tous à Marie-Line.

Table des matières

1	Matrices à signes alternants et boucles compactes	3
1.1	Matrices à signes alternants	3
1.1.1	Les matrices elles-mêmes	3
1.1.2	Objets équivalents	4
1.1.2.1	Matrices de hauteurs	4
1.1.2.2	Glace carrée et modèles “6-sommets”	6
1.1.2.3	Configurations de boucles compactes	7
1.1.2.4	Autres familles équivalentes	8
1.1.3	Classes de symétrie et de quasi-symétrie de matrices à signes alternants	8
1.1.3.1	Matrices réellement symétriques	9
1.1.3.2	Classes de quasi-symétrie	11
1.2	Couplages plans	11
1.2.1	Définition des couplages plans	11
1.2.2	Rotation	12
1.2.3	Variantes symétriques	12
1.3	Partitions planes	14
1.3.1	Définitions	14
1.3.2	Classes de symétrie	14
1.3.2.1	Partitions planes sans symétries imposées	14
1.3.2.2	Partitions planes symétriques, ou verticalement symétriques	14
1.3.2.3	Partitions planes cycliquement symétriques	15
1.3.2.4	Partitions planes totalement symétriques	15
1.3.2.5	Partitions planes auto-complémentaires	15
1.3.2.6	Partitions planes “complémentées par transposition”, ou horizontalement symétriques	15
1.3.2.7	Partitions planes symétriques et auto-complémentaires	15
1.3.2.8	Partitions planes cycliquement symétriques et complémentées par transposition	15
1.3.2.9	Partitions planes cycliquement symétriques, auto-complémentaires	16
1.3.2.10	Partitions planes totalement symétriques, auto-complémentaires	16
1.3.3	Énumération des classes de symétrie	16
1.3.4	Classes de quasi-symétrie	17
2	Énumérations de matrices à signes alternants	19
2.1	Énumérations connues de classes de symétrie de matrices à signes alternants	19
2.1.1	Sans symétries particulières	19
2.1.2	Symétrie verticale	20
2.1.3	Invariance par demi-tour	20
2.1.4	Symétrie verticale et horizontale	21
2.1.5	Invariance par quart de tour	21
2.1.6	Autres classes de symétrie	22
2.2	Énumération de configurations de glace carrée et formules de Yang-Baxter	22

2.2.1	Conventions et notations	22
2.2.2	Fonctions d'énumération d'ASM	23
2.2.2.1	Transformations locales : équation de Yang-Baxter	27
2.2.2.2	Quelques propriétés des fonctions de partition	29
2.2.3	Énumération des qQTASM	33
2.2.3.1	Parties paires et impaires des fonctions de partition	33
2.2.3.2	Spécialisations	34
2.2.3.3	Preuve du théorème 2.21	39
2.2.3.4	Remarques sur la preuve	41
2.3	Conclusion	42
3	FPL et couplages plans : conjectures de Razumov-Stroganov	43
3.1	Conjectures de Razumov et Stroganov	43
3.1.1	Opérateurs de croisement de brins	43
3.1.2	Conjecture (forte) de Razumov et Stroganov	44
3.1.3	Invariance par rotation : la gyration de Wieland	45
3.1.4	Interprétation probabiliste et combinatoire de la conjecture de Razumov et Stroganov	46
3.1.5	Comptages de FPL ayant un couplage donné	46
3.1.6	Autres conjectures à la Razumov-Stroganov	47
3.1.6.1	Le cas des HTFPL : couplages cylindriques	47
3.1.6.2	Le cas des VFPL : conditions de bord "fermées"	48
3.1.6.3	Le cas des VHFPL : conditions de bord "mixtes"	49
3.2	Couplages des QTFPL et qQTFPL	50
3.2.1	Le cas des QTFPL	50
3.2.2	Le cas des qQTFPL	51
3.2.3	Une preuve très partielle : le cas des couplages les plus rares	52
3.3	Couplages de VFPL et qVFPL	55
3.3.1	Couplages des anti-VFPL	56
3.3.2	Couplages des qVFPL de taille paire	57
3.4	Une piste d'attaque probabiliste et combinatoire	58
3.4.1	Distribution conjointe des couplages et anti-couplages	59
3.4.2	Une tentative de construction pour Φ	60
3.5	Conclusion	62
4	Ensembles partiellement ordonnés de FPL et génération aléatoire	63
4.1	Treillis des FPL de taille donnée	63
4.1.1	Classes de symétrie et ordre partiel	65
4.1.2	Le cas des partitions planes	67
4.2	Génération aléatoire : l'algorithme Sym-CFTP	67
4.2.1	CFTP classique	67
4.2.2	CFTP monotone sur un treillis distributif fini	69
4.2.3	Sym-CFTP : génération aléatoire d'idéaux symétriques	71
4.3	Exploration d'ensembles $\mathcal{A}(N; p)$	75
4.3.1	Construction de FPL ayant un couplage donné	75
4.3.2	Transformations locales et connexité	77
4.4	Conclusion	83
5	Graphes petits-mondes et algorithmique distribuée	85
5.1	Graphes petits-mondes	85
5.1.1	Petits-mondes navigables	86
5.1.2	Modèles de graphes "sans échelle"	87
5.2	Structuration de plates-formes de calcul distribuées	87
A	Bibliographie	89

B Curriculum vitae	93
B.1 Responsabilités et activités collectives	93
B.1.1 Responsabilités administratives et pédagogiques	93
B.1.2 Animation de la recherche	94
B.2 Enseignement et encadrement doctoral	94
B.2.1 Activités régulière d'enseignement	94
B.2.2 Enseignement en formation doctorale	95
B.2.3 Encadrement doctoral	95
B.3 Résumé de l'activité de recherche	95
B.3.1 Combinatoire énumérative : génération aléatoire et matrices à signes alternants	95
B.3.2 Algorithmique distribuée : petits-mondes et algorithmes pour les plates-formes à grande échelle	96
B.3.3 Projet de recherche pour les années à venir	97
B.4 Publications	97
B.4.1 Thèse	99
B.4.2 Revues	99
B.4.3 Conférences internationales	99
B.4.4 Conférences nationales avec publication d'actes	100

Introduction

Il est difficile, quand on prétend s'intéresser, sinon à tout, du moins à des sujets variés dans le cadre de ses activités de recherche, d'en faire une synthèse à la fois complète et cohérente. Confronté à ce problème, j'ai fait le choix de me concentrer dans ce mémoire sur mes activités récentes les plus combinatoires, reléguant à un unique chapitre tout un pan "algorithmique distribuée" de ma recherche. On trouvera donc dans les premiers chapitres un pot-pourri combinatoire, toujours orienté vers l'étude des *configurations de boucles compactes*. Le sujet, même vu à travers le prisme déformant de mes propres centres d'intérêt, est suffisamment riche pour qu'on rencontre une bonne partie des outils qui font le bonheur des combinatoristes : des bijections, des polynômes énumérateurs, des formules d'énumération mystérieuses, et même de grands objets aléatoires.

Le chapitre 1 décrit les différentes familles d'objets combinatoires impliqués : matrices à signes alternants, boucles compactes, couplages plans et, dans une moindre mesure, partitions planes. Il ne prétend pas à une grand originalité ; l'idée est surtout de rassembler en un même document des définitions et notations cohérentes sur ces objets.

Le chapitre 2 se penche sur l'une des activités favorites des combinatoristes : l'énumération des objets étudiés, en l'occurrence, les "configurations de boucles compactes" satisfaisant diverses conditions de symétrie. La quasi-totalité des "vraies" classes de symétrie de ces objets ont déjà été énumérées, mais il reste un peu de place pour des résultats nouveaux sur les classes de quasi-symétrie, et je présente en détail un résultat nouveau concernant l'énumération des FPL quasi-invariants par rotation d'un quart de tour, ainsi que des conjectures sur d'autres familles.

Le chapitre 3 est, en quelque sorte, le cœur et la motivation principale de ce travail : j'y présente les nombreuses conjectures "à la Razumov et Stroganov", concernant l'énumération de FPL raffinée par leurs "couplages". Ces conjectures ont fait couler beaucoup d'encre (et de sueur) chez les combinatoristes (et un certain nombre de physiciens, qui sont à l'origine du sujet) ces dernières années. J'ajoute quelque peu à la confusion en ajoutant de nouvelles variantes, et présente une piste potentielle d'attaque très combinatoire. Cette piste, bien qu'encore non fructueuse, semble corroborée par différents indices recueillis par l'énumération exhaustive de familles de FPL.

Le chapitre 4 se penche sur la structure ordonnée des objets étudiés. J'y décris entre autres un algorithme de génération aléatoire uniforme pour toutes les classes de symétrie de FPL ou de partitions planes, et des considérations relatives au parcours des ensembles de FPL ayant un couplage donné – considérations motivées, entre autres choses, par la piste combinatoire évoquée au chapitre précédent.

Enfin, le chapitre 5 évoque, très rapidement, d'autres activités de recherche, de nature moins combinatoire (ou d'une combinatoire différente), autour de la notion de "graphe petit-monde navigable" et d'algorithmes randomisés pour la structuration et la diffusion d'information de plates-formes de calcul distribuées "à grande échelle".

Chapitre 1

Matrices à signes alternants et boucles compactes

Dans ce chapitre, nous posons le décor en définissant les différentes familles d'objets discrets qui vont nous occuper : les matrices à signes alternants et leurs différentes incarnations, les schémas de couplage plans, et les partitions planes.

1.1 Matrices à signes alternants

1.1.1 Les matrices elles-mêmes

L'étude des matrices à signes alternants débute dans les années 1980, par un article de Mills, Robbins et Rumsey [52] qui s'intéressaient à la formule de condensation de Dodgson pour le calcul des déterminants. L'intérêt des combinatoristes fut rapidement piqué par la formule d'énumération de ces matrices, conjecturée dans l'article original de Mills, Robbins et Rumsey, mais qui ne fut démontrée que plus de 10 ans plus tard [77, 44] ; voir le livre de Bressoud [12] pour un survol historique. Cette formule indiquait des liens *a priori* non évidents avec d'autres familles d'objets déjà bien étudiées, les partitions planes.

Définition 1.1 (Matrice à signes alternants). *Une matrice carrée $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ est une matrice à signes alternants si*

1. *chacun de ses coefficients $m_{i,j}$ vaut 0, 1 ou -1 , et*
2. *dans chaque ligne et chaque colonne de M , il existe au moins un coefficient non nul, et ces coefficients non nuls alternent en signes, le premier et le dernier valant 1.*

Clairement, la deuxième condition implique que la somme des coefficients de chaque ligne comme de chaque colonne soit égale à 1, et donc que la somme de tous les coefficients de la matrice soit égale au nombre de lignes comme de colonnes ; par conséquent, une matrice satisfaisant aux conditions de signes alternants est nécessairement carrée.

Notons qu'une définition équivalente peut être donnée en termes des sommes partielles des coefficients des lignes et colonnes : si l'on pose

$$\begin{aligned} L_{i,j} &= \sum_{1 \leq \ell \leq j} m_{i,\ell} \\ C_{i,j} &= \sum_{1 \leq k \leq i} m_{k,j}, \end{aligned}$$

la matrice est à signes alternants si et seulement si on a $L_{i,j} \in \{0, 1\}$ pour tout $1 \leq j < N$, $C_{i,j} \in \{0, 1\}$ pour tout $1 \leq i < N$, et $L_{i,N} = C_{N,i} = 1$ pour tout i .

Un cas particulier de matrices à signes alternants est obtenu en s'interdisant les coefficients négatifs : on obtient alors toutes les matrices ayant exactement un coefficient non nul (égal à 1) par ligne et par colonne, autrement dit, les matrices de permutations. Ces matrices de permutations forment toutefois une infime minorité, comme en témoigne la formule d'énumération initialement conjecturée par Mills, Robins et Rumsey [52] et prouvée par Zeilberger [77] et, indépendamment et presque simultanément, par Kuperberg [44] :

Théorème 1.1. *Le nombre de matrices à signes alternants de taille N est*

$$A(N) = \prod_{0 \leq k < N} \frac{(3k+1)!}{(n+k)!} = (-3)^{\binom{n}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq N} \frac{3(j-i)+1}{j-i+n}. \quad (1.1)$$

Une estimation asymptotique élémentaire permet alors d'affirmer que $A(N)$ est de l'ordre de c^{N^2} (au sens du premier ordre exponentiel : $\ln A(N) = N^2 \ln c + O(N \ln N)$) avec $c = \frac{\sqrt{27}}{4} \simeq 1.299$, et par conséquent les matrices de permutations ne forment qu'une infime minorité des matrices à signes alternants.

1.1.2 Objets équivalents

Il existe plusieurs familles d'objets qui présentent des bijections simples avec les matrices à signes alternants. Selon le contexte, il peut être plus ou moins avantageux de travailler avec l'une ou l'autre de ces familles ; en tout état de cause, il est bon de les avoir en tête. On trouvera un survol de ces différents aspects dans [61].

1.1.2.1 Matrices de hauteurs

On l'a vu, les matrices à signes alternants peuvent être caractérisées par des conditions sur les sommes partielles des lignes et colonnes. Il est facile d'en donner une autre, portant sur les sommes partielles des "coins" de la matrice.

Posons, pour une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq N}$, $S = (s_{i,j})_{0 \leq i, j \leq N}$ avec

$$\begin{aligned} s_{i,j} &= \sum_{1 \leq k \leq i} \sum_{1 \leq \ell \leq j} m_{k,\ell} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq i} L_{k,j} \\ &= \sum_{1 \leq \ell \leq j} C_{i,\ell}; \end{aligned}$$

il est facile de retrouver M à partir de S , puisque l'on a $s_{i,0} = s_{0,j} = 0$ et $m_{i,j} = s_{i,j} - s_{i,j-1} - s_{i-1,j} + s_{i-1,j-1}$ pour $i > 0$ et $j > 0$. En traduisant directement les conditions sur les $C_{i,j}$ et $L_{i,j}$ qui caractérisent les matrices à signes alternants en termes des coefficients de la matrice S , on voit immédiatement qu'une telle matrice S , à coefficients entiers, provient d'une matrice à signes alternants, si et seulement si elle satisfait les conditions suivantes :

1. pour tout $0 \leq i \leq N$, $s_{i,0} = s_{0,i} = 0$ et $s_{i,N} = s_{N,i} = i$;
2. pour tout $1 \leq i, j \leq N$,

$$\begin{aligned} s_{i,j-1} &\leq s_{i,j} \leq s_{i,j-1} + 1 \\ s_{i-1,j} &\leq s_{i,j} \leq s_{i-1,j} + 1. \end{aligned}$$

Sous cette forme, les matrices S ont des coefficients fixés en première et dernière ligne et colonne, et ces conditions aux bords sont peu symétriques. Il est plus pratique de travailler avec la définition suivante :

Définition 1.2 (Matrice de hauteurs). *La matrice de hauteurs associée à une matrice à signes alternants M est la matrice $H = (h_{i,j})_{0 \leq i,j \leq N}$ définie par*

$$h_{i,j} = i + j - 2 \sum_{1 \leq k \leq i} \sum_{1 \leq \ell \leq j} m_{k,\ell}.$$

Il est clair que l'on peut toujours, par différences, retrouver la matrice M : on a

$$m_{i,j} = \frac{1}{2} (h_{i-1,j} + h_{i,j-1} - h_{i,j} - h_{i-1,j-1}).$$

Sous cette forme, la caractérisation des matrices de hauteurs est élémentaire :

Proposition 1.2. *Une matrice $H = (h_{i,j})_{0 \leq i,j \leq N}$ est la matrice de hauteurs associée à une matrice à signes alternants, si et seulement si elle satisfait les conditions suivantes :*

1. $h_{i,0} = h_{0,i} = h_{N,N-i} = h_{N-i,N} = i$ pour tout $0 \leq i \leq N$;
2. $|h_{i,j} - h_{i,j-1}| = |h_{i,j} - h_{i-1,j}| = 1$ pour tout $1 \leq i, j \leq N$.

Enfin, remarquons que la définition que nous avons donnée de la matrice de hauteurs présente une certaine symétrie par rapports aux quatre “coins” de la matrice à signes alternants : on a en effet

$$\begin{aligned} h_{i,j} &= h_{i,0} + h_{0,j} - 2 \sum_{1 \leq k \leq i} \sum_{1 \leq \ell \leq j} m_{k,\ell} \\ &= h_{i,0} + h_{N,j} - N + 2 \sum_{i < k \leq N} \sum_{1 \leq \ell \leq j} m_{k,\ell} \\ &= h_{i,N} + h_{0,j} - N + 2 \sum_{1 \leq k \leq i} \sum_{j < \ell < N} m_{k,\ell} \\ &= h_{i,N} + h_{N,j} - 2 \sum_{i < k < N} \sum_{j < \ell < N} m_{k,\ell}. \end{aligned}$$

La Figure 1.1 illustre cette correspondance, avec un exemple de matrice à signes alternants de taille 8 et la matrice de hauteurs (de taille 9) correspondante.

									0	1	2	3	4	5	6	7	8
	0	0	0	1	0	0	0	0	1	2	3	4	3	4	5	6	7
	0	1	0	-1	0	0	0	1	2	3	2	3	4	5	6	7	6
	0	0	1	0	0	0	0	0	3	4	3	2	3	4	5	6	5
	1	0	-1	0	0	1	0	0	4	3	2	3	4	5	4	5	4
4	0	0	0	0	1	-1	1	0	5	4	3	4	5	4	5	4	3
	0	0	1	0	0	0	0	0	6	5	4	3	4	3	4	3	2
	0	0	0	0	0	1	0	0	7	6	5	4	5	4	3	2	1
	0	0	0	1	0	0	0	0	8	7	6	5	4	3	2	1	0

FIG. 1.1 – Une matrice à signes alternants et la matrice de hauteurs associée

Le terme de “matrices de hauteurs” fait référence à la théorie des fonctions de hauteur associées aux pavages [18, 74], et généralisées par Propp [60] aux orientations de graphes quelconques qui ont sur chaque cycle du graphe une circulation constante. Dans le cas des matrices à signes alternants, les orientations en question seraient les duales des orientations eulériennes dont la description fait l’objet du prochain paragraphe; les matrices de hauteurs sont, à une normalisation près, les fonctions de hauteur correspondantes.

1.1.2.2 Glace carrée et modèles “6-sommets”

Dans une matrice à signes alternants, chaque coefficient doit être égal à 0 ou à ± 1 , mais ce que “cache” quelque peu la définition, c’est qu’il existe en quelque sorte quatre “façons” pour un coefficient d’être nul, en fonction du signe du dernier coefficient non nul qui le précède dans sa ligne et sa colonne (en considérant que ce signe est négatif si tout le début de la ligne ou colonne est nul, puisque cela équivaut à dire que le prochain coefficient non nul doit être positif). Cette information est directement codée dans les configurations connues des physiciens sous le nom de “glace carrée” (*square ice*) ou de modèles “6-sommets” (*6-vertex model*).

Une configuration de glace carrée est une orientation des arêtes d’une partie (finie) du réseau carré \mathbb{Z}^2 , avec la condition d’*orientation eulérienne* : parmi les 4 arêtes incidentes à chaque sommet, 2 doivent être entrantes et 2 sortantes. Pour avoir une correspondance parfaite avec les matrices à signes alternants, il convient de préciser des conditions particulières (*domain wall boundary conditions*, DWBC) sur les bords de la grille considérée :

Définition 1.3 (configuration de glace carrée). *Soit G un graphe simple, dont chaque sommet est de degré 1 ou 4. Une configuration de glace carrée sur G est une orientation des arêtes de G telle que le degré entrant et sortant de chaque sommet de degré total 4 soit exactement 2.*

Définition 1.4. *Soit $G_N = (V_N, E_N)$ le graphe simple défini par*

- $E_N = [[1, N]] \times [[1, N]] \cup \{0, N+1\} \times [[1, N]] \cup [[1, N]] \times \{0, N+1\}$;
- $((i, j), (k, \ell)) \in E_N$ si et seulement si
 - $|k - i| + |j - \ell| = 1$, et
 - l’un au moins de (i, j) et (k, ℓ) appartient à $[[1, N]] \times [[1, N]]$.

Une configuration de glace carrée (standard) de G_N est une configuration dans laquelle

- les arêtes $((i, 0), (i, 1))$ sont orientées de $(i, 0)$ vers $(i, 1)$;
- les arêtes $((i, N+1), (i, N))$ sont orientées de $(i, N+1)$ vers (i, N) ;
- les arêtes $((0, i), (1, i))$ sont orientées de $(0, i)$ vers $(1, i)$;
- les arêtes $((N+1, i), (N, i))$ sont orientées de $(N+1, i)$ vers (N, i) .

En d’autres termes, les arêtes du bord de la grille sont entrantes sur les côtés gauche et droit, et sortantes sur les côtés haut et bas (en représentant la grille avec des coordonnées matricielles, ce que nous ferons systématiquement).

Proposition 1.3. *Il existe une bijection entre l’ensemble des configuration de glace carrée sur G_N et l’ensemble des matrices à signes alternants de taille N .*

Démonstration. La règle pour passer d’une configuration de glace carrée à une matrice à signes alternants M est la suivante :

- si les deux arêtes entrantes du sommet (i, j) sont horizontales, et les deux arêtes sortantes, verticales, alors $m_{i,j} = 1$;
- si les deux arêtes entrantes de (i, j) sont verticales, et les deux arêtes sortantes, horizontales, alors $m_{i,j} = -1$;
- sinon (une arête entrante et une arête sortante horizontales), $m_{i,j} = 0$.

Inversement, pour passer d’une matrice à signes alternants à la configuration de glace carrée correspondante, la règle est la suivante :

- dans chaque ligne horizontale de la grille, les arêtes sont orientées depuis les positions des -1 de la matrice (ou depuis les bords gauche et droit) vers les positions de 1 de la matrice ;
- dans chaque ligne verticale de la grille, les arêtes sont orientées depuis les positions de 1 de la matrice vers les positions des -1 (ou les bords haut et bas).

Il est immédiat de vérifier que le premier jeu de règles est cohérent (les deux extrémités de chaque arête demandent la même orientation) et donne des matrices à signes alternants, et que le second jeu de règles en est l’inverse. ■

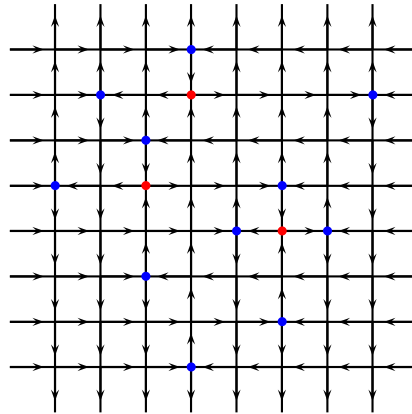


FIG. 1.2 – Une configuration de glace carrée

La Figure 1.2 donne un exemple de configuration de taille 8, qui correspond à la matrice à signes alternants de la Figure 1.1 ; les sommets correspondant aux coefficients 1 de la matrice sont figurés en bleu, et ceux correspondant aux coefficients -1 , en rouge.

La correspondance peut également être décrite simplement entre matrices de hauteurs et configurations de glace carrée, par des règles locales : si l'on superpose la matrice de hauteurs et le graphe G_N avec un décalage en quinconces, de manière à ce que le coefficient $h_{i,j}$ soit entouré des sommets (i, j) , $(i, j + 1)$, $(i + 1, j)$ et $(i + 1, j + 1)$, alors

- une arête horizontale est toujours orientée de manière à avoir sur sa gauche une valeur inférieure à sa droite, et
- une arête verticale est toujours orientée de manière à avoir sur sa droite une valeur inférieure à sa gauche.

1.1.2.3 Configurations de boucles compactes

La dernière famille d'objets classiques présentant une bijection simple avec les matrices à signes alternants est celle des *configurations de boucles compactes* (*Fully-packed loop configuration*, ou FPL).

Définition 1.5 (Configuration de boucles compactes, ou FPL). *Une configuration de boucles compactes (avec conditions standard au bord) de taille N , est un sous-graphe f de G_N tel que*

- les $4N$ arêtes issues des sommets de degré 1, prises dans l'ordre circulaire, sont alternativement présentes et absentes dans f , en commençant par l'arête $((1, 0), (1, 1))$ qui apparaît dans f ;
- chaque sommet de degré 4 de G_N a degré exactement 2 dans f .

Clairement, si f est un FPL, son complémentaire \bar{f} (l'ensemble des arêtes de G_N qui n'apparaissent pas dans f) donne également degré 2 aux N^2 sommets internes de G_N , et contient bien une arête du bord sur deux, en alternance ; la seule exception à la définition d'un FPL est que \bar{f} contient l'arête $((0, 1), (1, 1))$ et non l'arête $((1, 0), (1, 1))$. Nous appellerons *anti-FPL* une telle configuration complémentaire.

Proposition 1.4. *Il existe une bijection entre l'ensemble des FPL de taille N et l'ensemble des configurations de boucles compactes sur G_N .*

Démonstration. La règle de correspondance peut être énoncée ainsi : les arêtes du FPL sont exactement les arêtes entrantes du sommet (i, j) lorsque $i + j$ est pair, et les arêtes sortantes lorsque $i + j$ est impair. Il est immédiat de vérifier que cette règle est cohérente avec les conditions aux bords. ■

La Figure 1.3 montre un exemple de FPL de taille 8, correspondant aux exemples des Figures 1.1 et 1.2, ainsi que le couplage associé tel qu'il est défini plus loin.

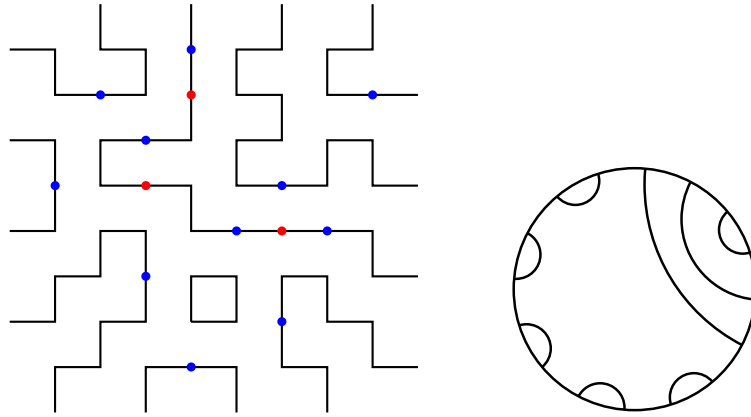


FIG. 1.3 – Un exemple de configuration de boucles compactes et le couplage associé

Par la suite, nous représenterons parfois ASM, FPL et/ou matrices de hauteurs de manière imbriquée, le coefficient $h_{i,j}$ se trouvant placé au centre d’une “case” dont les sommets sont les sommets de coordonnées (i, j) , $(i, j + 1)$, $(i + 1, j)$ et $(i + 1, j + 1)$ du FPL. Par “case” d’un FPL, nous désignerons un tel cycle de longueur 4 du graphe, la parité d’une case étant celle de $i + j$. Les conventions usuelles concernant les coordonnées matricielles et cartésiennes étant incompatibles, nous adopterons systématiquement les conventions matricielles : le coin supérieur gauche des grilles correspondra donc aux coordonnées $(1, 1)$.

La correspondance décrite ici entre FPL et matrices de hauteurs est un cas particulier de celle décrite dans [60]. Les FPL sont, dans la terminologie de Propp, les 2-couplages de la grille, et les matrices de hauteurs (qui donnent des hauteurs aux cases de la grille, donc aux sommets de la grille duale) sont (à normalisation près, qui nous permet d’avoir des matrices de hauteurs avec des conditions de bord relativement symétriques) celles des orientations (de la grille duale) pour lesquelles chaque cycle de longueur 4 a autant d’arêtes orientées dans le sens horaire que d’arêtes orientées dans le sens antihoraire.

1.1.2.4 Autres familles équivalentes

Il existe d’autres familles d’objets qui sont en bijection naturelle avec les matrices à signes alternants, mais qui n’apparaîtront pas dans ce mémoire. Les *tableaux monotones* sont des tableaux triangulaires d’entiers qui codent, ligne par ligne, les matrices à signes alternants ; il est toutefois difficile de décrire l’effet des différentes symétries sur ces tableaux. Les *pavages par dominos* du *diamant aztèque* (le diamant en question n’est en fait rien d’autre qu’un carré crénelé, traditionnellement tourné de 45 degrés, ce qui le fait qualifier de losange par les anglophones, mais, étant plus vendeur que “carré crénelé”, le terme est devenu standard) ne sont pas en bijection avec les matrices à signes alternants, mais il existe une correspondance simple qui associe, à chaque ASM, 2^k pavages, où k est le nombre de -1 dans la matrice.

1.1.3 Classes de symétrie et de quasi-symétrie de matrices à signes alternants

Les matrices à signes alternants, en tant que matrices carrées, et les FPL, en tant qu’objets dessinés dans une grille carrée, peuvent présenter certaines des symétries du carré. Dans certains cas, les conditions qui définissent les matrices à signes alternants impliquent que les classes de symétrie correspondantes sont vides pour certaines parités de taille. Dans ces cas, il est possible de définir de manière uniforme des classes de matrices à signes alternants *quasi-symétriques*. Cette définition se justifie en termes d’ensembles partiellement ordonnés (ce que nous verrons au Chapitre 4), mais aussi, du point de vue de la combinatoire, *a posteriori*, par le fait que ces classes de quasi-symétrie sont souvent comptées par des formules qui complètent harmonieusement les énumérations connues pour les matrices “vraiment” symétriques (ce que nous verrons au Chapitre 2).

1.1.3.1 Matrices réellement symétriques

Pour chaque classe de conjugaison de sous-groupe des isométries du carré, nous donnons les conditions qui définissent les matrices à signes alternants et FPL invariants par les transformations correspondantes, ainsi que la traduction sur les matrices de hauteurs.

Symétrie diagonale Les matrices à signes alternants de toutes tailles peuvent présenter une symétrie diagonale (la symétrie “classique” des matrices en algèbre linéaire), ce qui correspond à la condition

$$a_{j,i} = a_{i,j}, \quad (1.2)$$

qui se traduit également par la symétrie de la matrice des hauteurs correspondante : $h_{j,i} = h_{i,j}$. Pour les FPL, les conditions au bord n’étant pas invariantes par cette symétrie, les FPL correspondants sont ceux que la réflexion par rapport à la diagonale transforme en leur FPL complémentaire.

Nous noterons $\mathcal{A}_D(N)$ l’ensemble des ASM diagonalement symétriques de taille N , et parlerons de DASM.

Symétrie verticale Une matrice est *verticalement symétrique* si l’on a

$$a_{i,N+1-j} = a_{i,j}. \quad (1.3)$$

Pour une matrice à signes alternants, cela n’est possible que si N est impair, et dans ce cas la colonne centrale de la matrice ne doit contenir que des 1 et des -1 en alternances : $a_{i,(N+1)/2} = (-1)^i$.

Sur les matrices de hauteurs, cette condition se traduit sous la forme

$$h_{i,N-j} = N - h_{i,j}. \quad (1.4)$$

Pour les FPL correspondants, le fait que N soit impair assure que les conditions aux bords sont conservées : le FPL est bien sa propre image par une réflexion d’axe vertical.

Nous noterons $\mathcal{A}_V(N)$, l’ensemble des ASM verticalement symétriques de taille N , et parlerons de VASM ou de VFPL.

Symétrie centrale L’invariance par symétrie centrale, ou par demi-tour, se définit par

$$a_{N+1-i,N+1-j} = a_{i,j}, \quad (1.5)$$

et des matrices à signes alternants invariantes par symétrie centrale existent pour toutes les tailles.

La traduction sur les matrices de hauteurs est simplement

$$h_{N-i,N-j} = h_{i,j}. \quad (1.6)$$

Sur les FPL, les conditions de bord étant invariantes par la symétrie centrale, la condition de symétrie se traduit bien par l’invariance par rotation.

Nous noterons $\mathcal{A}_{HT}(N)$ l’ensemble des ASM invariantes par demi-tour, et parlerons de HTASM ou de HTFPL.

Symétrie horizontale et verticale La double symétrie horizontale et verticale se définit par la double condition

$$a_{N+1-i,j} = a_{i,N+1-j} = a_{i,j}. \quad (1.7)$$

Comme pour la simple symétrie verticale, les ASM verticalement et horizontalement symétriques n’existent que pour les tailles paires.

Sur les matrices de hauteurs, les conditions deviennent

$$h_{N-i,j} = h_{i,N-j} = N - h_{i,j}. \quad (1.8)$$

Les conditions de bord étant invariantes par les symétrie horizontale et verticale *lorsque la taille est impaire*, les FPL correspondants sont bien invariants par les deux symétries en question.

Nous noterons $\mathcal{A}_{\text{VH}}(2N+1)$ l'ensemble des ASM verticalement et horizontalement symétriques, et parlerons de VHASM ou de VHFPL.

Double symétrie diagonale La symétrie par rapport aux deux diagonales correspond à la double condition

$$a_{N+1-j,N+1-i} = a_{j,i} = a_{i,j}. \quad (1.9)$$

Sur les matrices de hauteurs, les conditions deviennent

$$h_{N-j,i} = h_{j,i} = h_{i,j}. \quad (1.10)$$

Les ASM doublement diagonalement symétriques existent pour toutes les tailles, et les FPL correspondants sont transformés en leur anti-FPL complémentaire par chacune des deux symétries diagonales. Nous noterons $\mathcal{A}_{\text{DD}}(N)$ l'ensemble des ASM doublement diagonalement symétriques, et parlerons de DDASM.

Invariance par quart de tour L'invariance par rotation d'un quart de tour se définit par

$$a_{j,N+1-i} = a_{i,j}. \quad (1.11)$$

Sur les matrices de hauteurs, la condition devient

$$h_{j,N-i} = N - h_{i,j}. \quad (1.12)$$

Les ASM invariantes par rotation d'un quart de tour existent pour les tailles impaires ou multiples de 4, mais pas pour les taille $4N+2$, ce qu'on peut voir aisément en remarquant que, pour une taille $N=2m$, (1.12) demande que l'on ait $h_{m,m}=m$, ce qui, lorsque m est impair, est incompatible avec le fait que $h_{i,j}$ a toujours la parité de $i+j$.

Lorsque la taille est paire (et donc, multiple de 4), les conditions de bord sont invariantes par quart de tour, et les FPL correspondant sont bien invariants par la rotation. En revanche, lorsque la taille est impaire, les FPL correspondant aux ASM invariantes par quart de tour sont transformés en leur anti-FPL complémentaires par la rotation.

Nous noterons $\mathcal{A}_{\text{QT}}(N)$ l'ensemble des ASM invariants par quart de tour (sauf pour N de la forme $4m+2$), et parlerons de QTASM et, pour N multiple de 4, de QTFPL.

Symétrie totale Les matrices totalement symétriques sont invariantes par toutes les isométries du carré, ce qui se définit de manière minimale par la symétrie diagonale et verticale :

$$a_{j,i} = a_{i,N+1-j} = a_{i,j}. \quad (1.13)$$

Sur les matrices de hauteurs, les conditions sont

$$h_{j,i} = h_{i,j} = N - h_{i,N-j}. \quad (1.14)$$

De telles ASM existent uniquement pour les tailles impaires, et les FPL correspondants sont transformés en leurs anti-FPL complémentaires par les deux symétries considérées.

Nous noterons $\mathcal{A}_{\text{T}}(2N+1)$ l'ensemble des ASM totalement symétriques, et parlerons de TASM.

1.1.3.2 Classes de quasi-symétrie

Le terme d'ASM ou de FPL *quasi-symétriques* n'est pas standard, mais nous allons voir que, dans toutes les situations où les ASM invariantes par certaines symétries n'existent pas pour certaines tailles, il est possible de définir systématiquement une classe d'ASM quasi-symétriques en se concentrant sur la définition par les matrices de hauteurs. Certaines des classes ainsi définies ont déjà été énumérées par Kuperberg [46], à partir de définitions basées sur les configurations de glace carrée, et nous verrons au Chapitre 4 que ces ASM quasi-symétriques ont également une définition naturelle en termes d'ensembles partiellement ordonnés.

Commençons par l'exemple de la symétrie verticale pour les tailles paires. L'équation (1.4) implique $h_{i,N/2} = N/2$, ce qui est impossible lorsque i est impair puisque, pour une matrice de hauteurs, $h_{i,j}$ a toujours la parité de $i + j$. Il en est bien entendu de même pour la symétrie horizontale pour $h_{N/2,j}$, et un phénomène identique se produit pour la taille $4N + 2$.

Définition 1.6. *Pour chaque classe de symétrie d'ASM qui est vide pour certaines tailles (VASM, VHASM, TASM de taille paire, QTASM de taille paire non multiple de 4), nous dirons qu'une ASM est quasi-symétrique pour cette condition de symétrie si sa matrice de hauteurs satisfait l'équation correspondante pour toutes ses cases, sauf celles où elle exige une hauteur $N/2$ dans une case qui doit contenir une hauteur de parité différente ; dans ces cases, nous conviendrons de fixer la hauteur à $N/2 - 1$.*

Pour distinguer les ASM et FPL quasi-symétriques, nous ajouterons systématiquement un q minuscule devant leur nom abrégé, et parlerons de q QTASM ou de q QTFPL par exemple. La notation utilisée pour l'ensemble des ASM quasi-symétriques d'une taille donnée restera la même : ainsi, $\mathcal{A}_V(12)$ désignera l'ensemble des q VASM de taille 12.

1.2 Couplages plans

Les objets que nous appellerons *couplages plans* font partie de la grande famille des objets comptés par les nombres de Catalan $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

1.2.1 Définition des couplages plans

Définition 1.7 (Couplage plan). *Soit N un entier positif. Un couplage plan (de $2N$ brins) est une partition p de l'ensemble $[[1, 2N]]$ en N paires, qui satisfait la condition de non croisement : si $\{i, j\}$ et $\{k, \ell\}$ sont deux paires de p , avec $i < k < j$, alors on a également $i < \ell < j$.*

L'ensemble des couplages plans de $2N$ brins sera noté \mathcal{C}_N .

La condition de non croisement énonce simplement qu'il est possible, en positionnant les entiers de 1 à $2N$, dans l'ordre, sur une droite (ou sur un cercle), de matérialiser les paires de p en reliant leurs éléments par des courbes situées au-dessus de la droite (ou à l'intérieur du cercle), sans que ces courbes ne s'entrecroisent. Les couplages plans sont donc exactement les partitions non croissantes de $[[1, 2N]]$ dont toutes les parts sont des paires.

Pour se convaincre que les couplages plans sont bien comptés par les nombres de Catalan, il suffit de remarquer qu'on obtient une bijection simple entre couplages plans de $2N$ brins et mots de Dyck de longueur $2N$ en utilisant le codage suivant : si l'on note $p(i)$ l'entier j tel que la paire $\{i, j\}$ soit dans p , le mot de longueur $2N$ dont la i -ème lettre est un a si $p(i) > i$ et un b si $p(i) < i$, est bien un mot de Dyck ; le décodage est immédiat.

Les couplages plans apparaissent naturellement dans les configurations de boucles compactes : dans un FPL de taille N , seuls $2N$ sommets du bord de la grille ont un degré 1, tous les autres ont degré 2 (ou 0 pour les autres sommets du bord de la grille). Par conséquent, le FPL est composé d'un certain nombre de boucles fermées, et d'exactly N chemins qui appairient deux à deux les sommets du bord,

définissant ainsi un couplage plan qui sera parfaitement déterminé une fois que nous aurons choisi une convention précise.

Définition 1.8 (couplage plan d'un FPL). *Dans le graphe G_N , notons A_1, \dots, A_{2N} , dans le sens trigonométrique, les sommets de degré 1 des FPL de taille N :*

- pour $1 \leq i \leq \lceil N/2 \rceil$, $A_i = (2i - 1, 0)$;
- pour $\lceil N/2 \rceil < i \leq N$, $A_i = (N + 1, 2i - N)$;
- pour $N < i \leq N + \lceil N/2 \rceil$, $A_i = (3N + 2 - 2i, N + 1)$;
- pour $i > N + \lceil N/2 \rceil$, $A_i = (0, 4N + 2 - 2i)$.

De même, notons B_i le symétrique de A_i par rapport à la diagonale principale, de sorte que les sommets B_i sont de degré 0 dans les FPL, et 1 dans les anti-FPL.

Alors, pour tout FPL f , le couplage plan de f , noté $c(f)$, est le couplage formé des paires $\{i, j\}$ telles que f contienne un chemin de A_i à A_j ; et le couplage $\bar{c}(f)$ est formé des paires $\{i, j\}$ telles que l'anti-FPL \bar{f} contienne un chemin de B_i à B_j .

Nous noterons $\mathcal{A}(N; p)$, l'ensemble des FPL de taille N ayant p pour couplage.

Il n'est pas évident *a priori* que $\mathcal{A}(N; p)$ n'est jamais vide, bien qu'expérimentalement, il soit facile, avec un peu d'habitude, de construire un FPL ayant un couplage donné. Nous donnerons au Chapitre 4 un algorithme de construction qui donnera, au passage, une preuve de la non-vacuité de $\mathcal{A}(N; p)$.

1.2.2 Rotation

Les couplages plans présentent une symétrie naturelle, que nous appellerons *rotation* :

Définition 1.9 (Rotation sur les couplages). *Nous noterons R (ou R_{2N} si la confusion est possible) la bijection $\mathcal{C}_{2N} \rightarrow \mathcal{C}_{2N}$, qui envoie chaque couplage p sur le couplage p' tel que, pour chaque paire $\{i, j\}$ de p , p' contient la paire $\{i + 1, j + 1\}$ (où l'addition est prise modulo $2N$, de telle sorte que $2N + 1 = 1$).*

Ainsi, avec la convention que nous avons adoptée, R fait tourner dans le sens trigonométrique les couplages lorsqu'ils sont considérés comme couplages de FPL, et dans le sens horaires lorsqu'ils sont considérés comme couplages d'anti-FPL.

1.2.3 Variantes symétriques

Parmi les couplages plans, il en existe qui sont invariants par une rotation d'un demi tour, c'est-à-dire que l'on a $R^N(p) = p$ ou, dit autrement, que pour chaque paire $\{i, j\}$ de p , p contient également la paire $\{i + N, j + N\}$. Plus généralement, pour peu que $2N$ soit un multiple d'un entier k , on peut considérer les couplages invariants par une rotation d' $1/k$ -ème de tour, *i.e.* tels que l'on ait $R^{2N/k}(p) = p$, ou encore qu'à chaque paire $\{i, j\}$ corresponde une paire $\{i + 2N/k, j + 2N/k\}$.

Il se trouve que dans ce cas, le nombre de couplages plans satisfaisant une telle condition de périodicité ne dépend que du ratio $2N/k$, et que ces couplages plans périodiques peuvent être simplement codés par des mots de Dyck bilatères.

Proposition 1.5. *Soient N et $k > 1$ deux entiers, tels que $k|2N$, et soit $\mathcal{C}_{N,k}$ l'ensemble des couplages plans de $2N$ brins satisfaisant $R^{2N/k}(p) = p$. Alors*

- si $k = 2$ et que $N = 2n + 1$ est impair, $|\mathcal{C}_{N,k}| = \binom{2n+1}{n}$;
- si $\ell = 2N/k$ est pair, alors $|\mathcal{C}_{N,k}| = \binom{\ell}{\ell/2}$;
- sinon, $\mathcal{C}_{N,k} = \emptyset$.

Démonstration. Dans les deux premiers cas, nous construisons explicitement une bijection avec les mots d'un langage approprié.

Commençons par le cas où ℓ est pair. Soit $p \in \mathcal{C}_{N,k}$. Pour tout i , $p(i) - i$ est nécessairement impair (les entiers situés entre i et $p(i)$ dans l'ordre cyclique doivent en effet former un ensemble de paires, donc

être en nombre pair). Pour chaque paire $\{i, j\}$, disons que i est extrémité gauche si $i < j < i + \ell$ dans l'ordre cyclique, et extrémité droite sinon ($i - \ell < j < i$, en raison de la condition de non croisement); et considérons le mot w de longueur $2N$, dont la i -ème lettre est a si i est extrémité gauche, et b sinon. Le mot w contient autant d'occurrences des deux lettres a et b , et la condition de périodicité implique que w est la puissance k -ème d'un mot $w' = \Phi(p)$, qui est par conséquent également un mot de Dyck bilatère, de longueur ℓ cette fois. Il est facile de vérifier que Φ est une bijection entre $\mathcal{C}_{N,k}$ et l'ensemble \mathcal{B}_ℓ des mots de Dyck bilatères de longueur ℓ ; le décodage s'effectue en élevant le mot à la puissance k -ème, et en appariant les entiers dont les positions sont en vis à vis dans le mot : i avec j si $i < j < i + \ell$ dans l'ordre cyclique, que $w_i = a$, $w_j = b$, et si les lettres entre les positions $i + 1$ et $j - 1$ forment un mot de Dyck.

Au total, le cardinal de $\mathcal{C}_{N,k}$ est donc celui de \mathcal{B}_ℓ , soit $\binom{\ell}{\ell/2}$.

Dans le cas où $k = 2$ et N impair, tout couplage $p \in \mathcal{C}_{N,k}$ a un nombre impair de paires, et donc l'une d'entre elles doit être de la forme $\{i, i + N\}$. Le codage d'un couplage périodique suit le même principe, en codant par une lettre spéciale c les deux éléments de cette paire diamétrale, on obtient un mot w , qui est le carré d'un mot $w' = \Phi'(p)$. Ce mot est de la forme ucv , où vu est un mot de Dyck, et on vérifie aisément que Φ' est une bijection entre $\mathcal{C}_{N,2}$ et l'ensemble des mots de cette forme. Enfin, le nombre de tels mots est clairement $(2N + 1)C_N = \binom{2N+1}{N}$.

Enfin, pour les autres cas où ℓ est impair, un couplage devrait avoir, dans le segment $[[1, \ell]]$, un nombre impair d'entier appariés avec des entiers hors du segment. Or, la condition de périodicité implique qu'il y en ait autant qui soient appariés avec le segment $[[\ell + 1, 2\ell]]$ qu'avec le segment $[[N - \ell + 1, N]]$, et par conséquent $\mathcal{C}_{N,k}$ est vide. ■

Dans la pratique, les couplages plans périodiques sont surtout intéressants lorsque $k = 2$ ou $k = 4$, en tant que couplages des FPL invariants par symétrie centrale ou par une rotation d'un quart de tour. En particulier, notons qu'il existe une bijection naturelle entre les couplages des FPL de taille paire, invariants par symétrie centrale, et ceux des FPL de taille double, invariants par rotation d'un quart de tour.

Enfin, remarquons que l'on peut donner une interprétation géométrique du fait qu'il y a $N + 1$ fois plus de couplages plans sur $4N$ brins, invariants par demi tour, que de couplages plans sur $2N$ brins. En effet, étant donné un tracé symétrique du couplage de $4N$ brins à l'intérieur du cercle (évitant le centre du cercle), on obtient un couplage deux fois plus petit en coupant diamétralement et en recollant les deux rayons (ou en appliquant la transformation complexe $z \mapsto z^2$). Dans cette transformation, chaque couplage sur $2N$ brins a $N + 1$ antécédents, correspondant aux $N + 1$ régions dans lesquelles peut être placé le point singulier 0. En quelque sorte, les couplages plans sont dessinés sur un disque, et les couplages plans périodiques, sur un disque privé d'un point, ou un cylindre.

Une définition alternative pour les couplages cylindriques de $4N$ brins, qui est celle employée dans [23], est au moyen de N couples (i, j) , l'interprétation géométrique étant que le couplage peut être dessiné à l'intérieur d'un disque privé d'un point, muni de $2N$ points $1, \dots, 2N$ répartis dans le sens trigonométrique sur le cercle, dans lequel chaque couple (i, j) est matérialisé par une courbe orientée du point i au point j , le point interdit se trouvant toujours sur la gauche de la courbe. Sous cette forme, la condition de non croisement peut s'énoncer de la sorte : pour tout couple (i, j) et tout entier k avec $i < k < j$ dans l'ordre cyclique, le couple auquel appartient k est soit de la forme (k, ℓ) avec $k < \ell < j$ dans l'ordre cyclique, soit de la forme (ℓ, k) avec $i < \ell < k$ dans l'ordre cyclique.

Dans le cas des couplages cylindriques de $4N + 2$, on a une également une représentation sous la forme de N couples et d'un entier isolé partitionnant l'ensemble $[[1, 2N + 1]]$; la condition de non croisement exige alors que, si l'entier isolé est i , chaque couple (j, k) doit être tel que l'on ait $i < j < k$ dans l'ordre cyclique (en plus de la condition de non croisement précédente).

Dans les deux cas, nous noterons \mathcal{C}'_m l'ensemble de ces couplages cylindriques à $2m$ brins, que m soit pair ou impair.

1.3 Partitions planes

1.3.1 Définitions

Les partitions planes sont la version “à une dimension de plus” des partitions d’entiers : si l’on aime voir une partition de l’entier n comme une suite décroissante (donc un objet “à une dimension”) d’entiers dont la somme est n , une partition plane est un tableau bidimensionnel, décroissant en lignes et en colonnes, d’entiers, dont la somme est n ; et si l’on préfère voir une partition sous la forme d’un diagramme bidimensionnel (une partie de \mathbb{N}^2 , de cardinal n , telle que si (i, j) est présent chaque (i', j') avec $i' \leq i$ et $j' \leq j$ l’est également, une partition plane est une partie de \mathbb{N}^3 , telle que pour chaque (i, j, k) présent, chaque (i', j', k') avec $i' \leq i, j' \leq j, k' \leq k$ est également présent. En d’autres termes, les partitions planes sont les idéaux de l’ensemble \mathbb{N}^3 , muni de l’ordre produit.

Toutes les partitions planes que nous rencontrerons seront contraintes à “vivre” à l’intérieur d’une “boîte”, ce qui revient, dans la version “tableau d’entiers”, à imposer que les entrées non nulles aient des coordonnées bornées dans les deux directions, et que toutes soient inférieures à une valeur fixée ; et, dans la version “ensemble de triplets d’entiers”, à se limiter aux triplets pour lesquels chaque coordonnée est bornée.

Définition 1.10. *Une partition plane de taille $a \times b \times c$ est une partie P de $[[1, a]] \times [[1, b]] \times [[1, c]]$ qui est un idéal pour l’ordre partiel produit, i.e. telle que, si $(i, j, k) \in P$ et $1 \leq i' \leq i, 1 \leq j' \leq j$ et $1 \leq k' \leq k$, alors $(i', j', k') \in P$.*

Une représentation graphique classique des partitions planes prend la forme d’une vue en perspective d’un ensemble de cubes entassés dans un coin. Pour une partition plane de taille $a \times b \times c$, on obtient simplement un pavage d’un hexagone de côtés (en ordre cyclique) a, b, c, a, b, c au moyen de losanges (de côté 1, et d’angles internes de 60 et 120 degrés).

Toutes les partitions planes que nous rencontrerons seront contraintes à vivre dans une boîte cubique, c’est-à-dire à avoir une taille de la forme $N \times N \times N$, ce que nous abrègerons en “taille N ”. Sous la forme de pavages, il s’agira donc de pavages d’hexagones réguliers.

1.3.2 Classes de symétrie

Comme les matrices à signes alternants, les partitions planes peuvent présenter des symétries. La terminologie standard est issue de la définition en termes d’idéaux plutôt que des pavages ; nous adoptons ici, en conservant l’ordre des définitions, celle employée dans [71].

1.3.2.1 Partitions planes sans symétries imposées

Il s’agit des partitions planes “simples”, sans autre contrainte.

1.3.2.2 Partitions planes symétriques, ou verticalement symétriques

Une partition plane est *symétrique* (nous parlerons de SPP, pour *symmetric plane partition*) si elle est sa propre image par l’opération de *transposition* qui transforme P en

$$P^* = \{(i, j, k) : (j, i, k) \in P\}.$$

En d’autres termes, chaque fois qu’elle contient un triplet (i, j, k) , elle contient également (j, i, k) . Sous la forme d’un tableau d’entiers $(\pi_{i,j})$, cela se traduit par la condition que le tableau est symétrique par rapport à sa diagonale principale : $\pi_{j,i} = \pi_{i,j}$. Dans la représentation par pavage d’un hexagone, la condition est que le pavage est symétrique par rapport à un axe traversant deux sommets de l’hexagone (symétrie verticale).

1.3.2.3 Partitions planes cycliquement symétriques

Une partition plane P est *cycliquement symétrique* (CSPP : *cyclically symmetric plane partition*) si, pour chaque triplet $(i, j, k) \in P$, les triplets (j, k, i) et (k, i, j) obtenus par permutations circulaires des coordonnées sont également dans P .

Dans la représentation comme pavage d'un hexagone, cette condition équivaut à ce que le pavage soit invariant par une rotation d'un tiers de tour, et non d'un sixième.

1.3.2.4 Partitions planes totalement symétriques

Une partition de taille est *totalement symétrique* (TSPP : *totally symmetric plane partition*) si elle est à la fois verticalement et cycliquement symétrique. Cela correspond à l'invariance d'un idéal par tous les automorphismes de l'ordre partiel $[[1, N]]^3$. Sur les pavages, la terminologie est un peu trompeuse car cela ne correspond pas à toutes les symétries de l'hexagone.

1.3.2.5 Partitions planes auto-complémentaires

Une partition plane de taille $a \times b \times c$ est *auto-complémentaire* (SCPP : *self-complementary plane partition*) si, sous la forme d'un tableau bidimensionnel $(\pi_{i,j})$, on a $\pi_{i,j} + \pi_{a+1-i, b+1-j} = c$ pour tous i, j – la définition est dépendante de la “boîte” dans laquelle la partition plane est inscrite. Lorsque a, b et c sont tous trois impairs, il n'existe pas de telles partitions planes auto-complémentaires puisque la définition exige que l'entrée centrale du tableau soit un demi-entier.

Sur les pavages d'hexagones, la condition se traduit par le fait que le pavage est invariant par une symétrie centrale. Comme idéal de $[[1, a]] \times [[1, b]] \times [[1, c]]$, une partition plane P est auto-complémentaire lorsque, pour tout $(i, j, k) \in P$, le triplet symétrique $(a + 1 - i, b + 1 - j, c + 1 - k)$ n'est pas dans P .

1.3.2.6 Partitions planes “complémentées par transposition”, ou horizontalement symétriques

Une partition plane de taille $a \times a \times c$ est *“complémentée par transposition”* (TCPP : *transpose-complement plane partition*, dans la terminologie de Stanley) si, sous forme de pavage de l'hexagone, elle est symétrique par rapport à l'axe joignant les milieux des deux côtés verticaux de l'hexagone (ce qui implique que les deux autres paires de côtés aient la même longueur, d'où la contrainte sur la taille). Comme tableau bidimensionnel, la condition est $\pi_{a+1-j, a+1-i} + \pi_{i,j} = c$ (ce qui implique que c soit pair, sans quoi les entrées situées sur la diagonale secondaire du tableau sont contraintes à être des demi-entiers). Comme idéal, cela revient à exiger que, lorsque $(i, j, k) \in P$, $(a + 1 - j, a + 1 - i, c + 1 - k) \notin P$.

Le nom provient du fait que l'image de la partition plane par transposition (échange des coordonnées i et j) est la même que celle par complémentation (qui correspond à la symétrie centrale) : en composant la symétrie d'axe vertical et la symétrie centrale, on obtient bien la symétrie d'axe horizontal.

1.3.2.7 Partitions planes symétriques et auto-complémentaires

Une partition plane à la fois symétrique et auto-complémentaire (SSCPP) est, vue comme pavage, invariante à la fois par les symétries d'axes vertical et horizontal (et donc, auto-complémentaire, puisque invariante par symétrie centrale).

1.3.2.8 Partitions planes cycliquement symétriques et complémentées par transposition

En termes de pavages, les CSTCPP (*cyclically symmetric, transpose-complement plane partitions*) présentent l'invariance par rotation d'un tiers de tour et par symétrie d'axe horizontale (donc, par tous les axes passant par les milieux de deux côtés opposés). Ces partitions planes doivent donc être de taille N , avec N pair.

1.3.2.9 Partitions planes cycliquement symétriques, auto-complémentaires

Pour être à la fois cycliquement symétrique et auto-complémentaire (CSSCPP : *cyclically symmetric, self-complementary plane partitions*), il faut qu'une partition plane soit de taille N , avec N pair. Comme pavage, l'invariance par symétrie centrale (demi-tour) et par rotation d'un tiers de tour se ramène à la seule invariance par rotation d'un sixième de tour.

1.3.2.10 Partitions planes totalement symétriques, auto-complémentaires

Les partitions planes totalement symétriques auto-complémentaires (TSSCPP, qui sont forcément de taille N , avec N pair) sont celles qui, comme pavages de l'hexagone régulier, présentent toutes les symétries de l'hexagone (engendrées par les symétries par rapport à deux axes, l'un passant par deux sommets opposés, l'autre par les milieux de deux côtés opposés incidents aux sommets de l'axe précédent).

1.3.3 Énumération des classes de symétrie

Les partitions planes des quatre premières classes de symétrie peuvent être définies comme, parmi les idéaux de l'ordre partiel produit $P_{a,b,c} = [[1, a]] \times [1, b] \times [[1, c]]$ (avec des conditions d'égalité pour certains des paramètres, selon la classe de symétrie), ceux qui sont invariants par un sous-groupe G de l'ensemble des automorphismes de l'ordre partiel. L'autre particularité de ces quatre classes de symétrie est qu'elles admettent toutes une formule d'énumération unifiée : si l'on pose $h(i, j, k) = i + j + k - 2$ ($h(i, j, k)$ représente ainsi le rang du triplet (i, j, k) dans l'ordre produit), et si G représente le groupe de symétrie, on a pour chacune de ces classes [49, 51, 72]

$$N_i(a, b, c) = \prod_{x \in P_{a,b,c}/G} \frac{1 + h(x)}{h(x)} \quad (1.15)$$

(ici $P_{a,b,c}/G$ désigne l'ensemble des orbites sous l'action du groupe de symétries G , orbites sur lesquelles h est bien constante).

Pour les SSCP, Stanley [71] donne des formules en fonction de la parité des côtés de l'hexagone, sous forme de produits d'énumérations de partitions planes sans symétrie :

$$N_5(2a, 2b, 2c) = N_1(a, b, c)^2 \quad (1.16)$$

$$N_5(2a + 1, 2b, 2c) = N_1(a + 1, b, c)N_1(a, b, c) \quad (1.17)$$

$$N_5(2a + 1, 2b + 1, 2c) = N_1(a + 1, b, c)N_1(a, b + 1, c). \quad (1.18)$$

Pour les TCPP de taille $a \times a \times 2c$, la formule est due à Proctor [59] :

$$N_6(a, a, 2c) = \binom{c+1-a}{a-1} \prod_{1 \leq i \leq j \leq c-2} \frac{2c+i+j+1}{i+j+1}. \quad (1.19)$$

Pour les SSCPP, Proctor [58] montre que l'énumération est celle de partitions planes (environ) deux fois plus petites :

$$N_7(2a, 2a, 2c) = N_1(a, a, c) \quad (1.20)$$

$$N_7(2a + 1, 2a + 1, 2c) = N_1(a, a + 1, c). \quad (1.21)$$

Les CSTCPP sont énumérées par Mills, Robbins et Rumsey [53] :

$$N_8(2N) = \prod_{0 \leq i \leq N-1} \frac{(3i+1)!(6i)!(2i)!}{(4i+1)!(4i)!}. \quad (1.22)$$

Enfin, les TSSCPP et CSSCPP (de taille $2N$) sont respectivement comptées par le nombre de matrices à signes alternants¹ de taille N et par son carré :

$$N_{10}(2N) = A(N) = \prod_{0 \leq i \leq N} \frac{(3i+1)!}{(N+i)!} \quad (1.23)$$

$$N_9(2N) = N_{10}(2N)^2. \quad (1.24)$$

La formule (1.23) est prouvée par Kuperberg [43], et l'énumération des TSSCPP par Andrews [2]. Ciucu [17] donne une preuve "directe" de (1.24), ne nécessitant pas de connaître la formule (1.23).

1.3.4 Classes de quasi-symétrie

Même en se limitant aux partitions planes de taille N (donc aux pavages d'un hexagone régulier), il existe des classes de symétrie qui sont vides lorsque la taille est impaire : toutes celles qui imposent l'auto-complémentarité (symétrie centrale) ou la complémentation par transposition (symétrie horizontale). Nous définissons ici, dans ces cas, des classes de quasi-symétrie qui sont cohérentes avec la définition plus générale que nous verrons au Chapitre 4.

Dans le cas de la symétrie verticale, la contrainte imposerait que la bande d'hexagones de côté 1 qui joint les milieux des côtés verticaux (voir Figure 1.4(a)) soit pavée de manière symétrique, ce qui est impossible. Nous dirons qu'une partition plane est *quasi-verticalement symétrique*, si elle est verticalement symétrique en dehors de cette bande ; afin d'éviter les ambiguïtés, chaque hexagone de la bande sera pavé sous la forme \heartsuit . Comme idéal de $[[1, 2N+1]]^3$, cela revient à demander que, chaque fois que (i, j, k) est présent, $(2N+2-j, 2N+2-j, 2N+2-k)$ est absent, sauf pour les triplets de la forme $(i, 2N+2-i, N+1)$ qui sont absents.

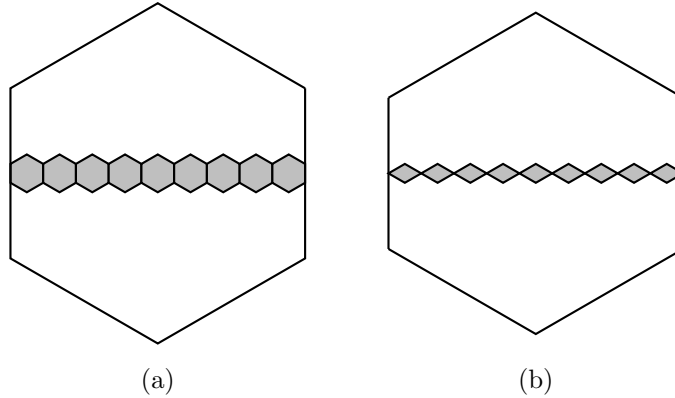


FIG. 1.4 – Squelettes pour (a) qTCPP de taille $2N+1$ et (b) TCPP de taille $2N+1 \times 2N+1 \times 2N$

Au total, les qCTPP de taille $2N+1$ sont naturellement en bijection avec les CTPP de taille $2N+1 \times 2N+1 \times 2N$.

Dans le cas de l'auto-complémentarité, la seule obstruction à l'existence de SCPP de taille $2N+1$ (ou, plus généralement, de taille $a \times b \times c$ avec a, b, c tous trois impairs) provient de l'hexagone de côté 1 central, qui ne peut être pavé de manière invariante par symétrie centrale. Nous dirons donc qu'une partition plane est *quasi-auto-complémentaire*, et parlerons de qSCPP, si le pavage associé est un pavage invariant par symétrie centrale de l'hexagone privé de son hexagone unité central (que nous convenons de paver par \heartsuit). En termes d'idéaux de $[[1, 2N+1]]^3$, il s'agit d'idéaux qui satisfont la condition d'auto-complémentarité, hormis pour le triplet $(N+1, N+1, N+1)$ qui est absent par convention.

¹Historiquement, ce sont plutôt les matrices à signes alternants qui sont comptées par les mêmes nombre que les TSSCPP, puisque la preuve pour les partitions planes précède celles pour les matrices.

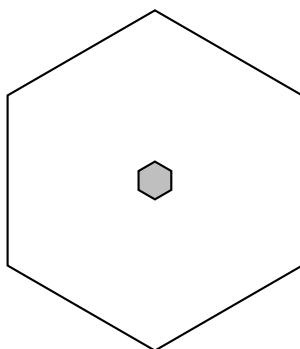


FIG. 1.5 – Région à paver pour obtenir qSCPP et qCSCPP de taille impaire

De la même manière, on peut définir les qCSCPP (partitions planes quasi-cycliquement symétriques, auto-complémentaires) de taille $2N + 1$, en remplaçant l'invariance par demi-tour par celle par sixième de tour. Nous verrons au Chapitre 3 que les qCSCPP de taille $2N + 1$ sont comptées par $A(N)A(N + 1)$.

Chapitre 2

Énumérations de matrices à signes alternants

Il existe de nombreux résultats d'énumération sur les matrices à signes alternants, pour la plupart des classes de symétrie et certaines des classes de quasi-symétries décrites au Chapitre 1. Bien que la première preuve de la formule d'énumération générale soit celle de Zeilberger, il semble que ce soit plutôt la technique de Kuperberg, basée sur les configurations de glace carrée, la formule de Yang-Baxter et des évaluations de déterminants et de pfaffiens, qui soit le plus adaptable ; c'est celle que nous adoptons ici, en décrivant un résultat obtenu avec Jean-Christophe Aval concernant l'énumération des ASM quasi-invariantes par une rotation d'un quart de tour.

2.1 Énumérations connues de classes de symétrie de matrices à signes alternants

Beaucoup de formules d'énumération d'ASM font également intervenir des énumérations de partitions planes. Presque toutes les classes de symétrie (en fait, toutes celles qui ne font pas intervenir la symétrie diagonale) ont des formules d'énumération "simples" ou, à tout le moins, fortement factorisables. Les formules d'énumération pour les classes de symétrie réelles ont toutes été conjecturées par David Robbins [69] dès la fin des années 1980.

2.1.1 Sans symétries particulières

La formule d'énumération, initialement conjecturée par Mills, Robbins et Rumsey [52], a été démontrée plusieurs années plus tard par Zeilberger [77], et peu après, de manière indépendante, par Kuperberg [44].

Théorème 2.1 (Zeilberger). *Le nombre de matrices à signes alternants de taille N est*

$$A(N) = \prod_{0 \leq i \leq N-1} \frac{(3i+1)!}{(n+i)!} = (-3)^{\binom{N}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq N} \frac{3(j-i)+1}{j-i+N} \quad (2.1)$$

Le nombre $A(N)$ était déjà connu des combinatoristes : c'est également le nombre de *partitions planes totalement symétriques auto-complémentaires* (TSSCPP : *totally symmetric, self-complementary plane partitions*) de côté $2N$, et son carré compte les CSSCPP (*partitions planes cycliquement symétriques auto-complémentaires*) de côté $2N$. Ciucu [17] a donné une preuve directe (ne nécessitant pas de connaître le nombre qu'on élève au carré) de cette relation ; en revanche, à ce jour aucune bijection "simple" ou "combinatoire" n'est connue entre ASM et TSSCPP.

2.1.2 Symétrie verticale

La formule d'énumération conjecturée par Robbins [69] a été prouvée par Kuperberg [46].

Théorème 2.2 (Kuperberg). *Le nombre de VFPL de taille $2N + 1$ est donné par*

$$A_V(2N + 1) = (-3)^{N^2} \prod_{\substack{1 \leq i, j \leq 2N+1 \\ 2 \nmid j}} \frac{3(j-i) + 1}{j-i + 2N + 1}. \quad (2.2)$$

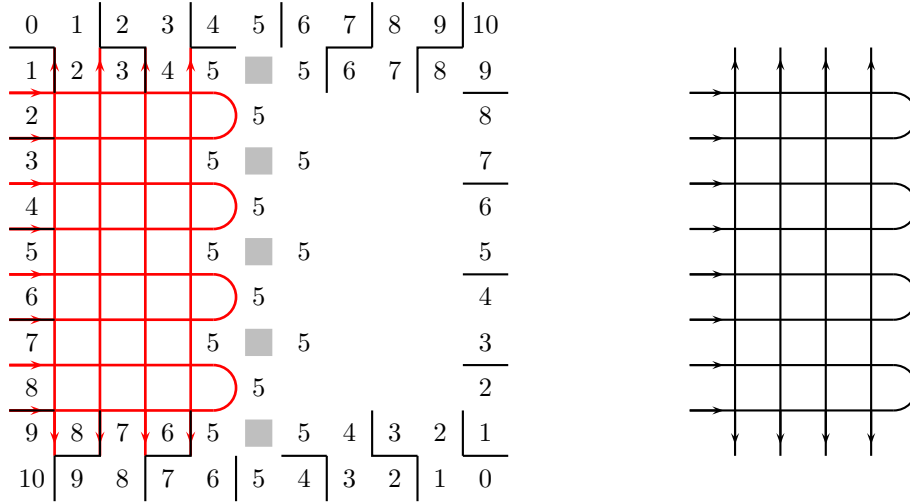


FIG. 2.1 – Correspondance entre qVFPL de taille $2N$ et UASM de taille $2N - 2$

Il n'existe pas de VFPL de taille paire, mais les qVFPL de taille $2N$ sont en bijection avec les configurations de glace carrée comptées par Kuperberg [46] sous le nom de *UASM* (U-turn ASM) de taille $2N - 2$, comme on peut le voir sur la Figure 2.1. Le résultat de Kuperberg peut donc se reformuler en

Théorème 2.3 (Kuperberg). *Le nombre de qVFPL de taille $2N$ est*

$$A_V(2N) = 2^{N-1} A_V(2N - 1). \quad (2.3)$$

2.1.3 Invariance par demi-tour

La formule d'énumération des HTASM a été conjecturée par Robbins [69]. Elle a été prouvée par Kuperberg [46] pour les tailles paires, et par Razumov et Stroganov [67] pour les tailles impaires.

Théorème 2.4 (Kuperberg, Razumov et Stroganov). *Le nombre de HTASM est donné par*

$$A_{HT}(2N) = A(N) (-3)^{\binom{N}{2}} \prod_{1 \leq i, j \leq N} \frac{3(j-i) + 2}{j-i + N} \quad (2.4)$$

$$A_{HT}(2N + 1) = \frac{N!(3N)!}{(2N)!^2} A_{HT}(2N). \quad (2.5)$$

Notons que le ratio $A_{HT}(2N)/A(N)$ donné par la formule (2.4), qui ressemble fort à la deuxième formule de (2.1), compte également les partitions planes cycliquement symétriques (*cyclically symmetric plane partitions*, ou CSPP) de côté N .

2.1.4 Symétrie verticale et horizontale

La formule d'énumération des VHASM a été conjecturée par Robbins [69], et démontrée récemment par Okada [57].

Théorème 2.5 (Okada). *Le nombre de VHASM de taille est donné par*

$$A_{\text{VH}}(4N - 1) = A_{\text{V}}(2N - 1)P_{\text{CSTC}}(2N) \tag{2.6}$$

$$A_{\text{VH}}(4N + 1) = A_{\text{V}}(2N + 1)P_{\text{CSTC}}(2N), \tag{2.7}$$

où

$$P_{\text{CSTC}}(2N) = \prod_{0 \leq i \leq N-1} (3i + 1) \frac{(6i)!(2i)!}{(4i)!(4i + 1)!} \tag{2.8}$$

désigne le nombre de partitions planes cycliquement symétriques, complémentaires par transposition (cyclically symmetric, transpose complement plane partitions) de côté $2N$, c'est-à-dire, en termes de pavages, les pavages par losanges d'un hexagone de côté $2N$ qui sont invariants par rotation d'un tiers de tour et par symétrie par rapport à un axe perpendiculaire aux côtés.

Les qVHASM de taille $4N$ ont été étudiés, sous le nom de "UUSASM" (de taille $4N - 4$), par Kuperberg [46]. Sans obtenir une formule d'énumération, Kuperberg démontre entre autres que $A_{\text{HT}}(4N)$ est divisible par $A_{\text{V}}(2N - 1)$.

Pour les tailles paires non multiples de 4, Florent Le Gac et moi-même avons compté les qVHASM jusqu'à la taille 22. Les nombres obtenus semblent avoir toujours de petits facteurs premiers, mais si aucune formule d'énumération simple ne semble se dégager à première vue, il semble que $A_{\text{VH}}(4N + 2)$ soit toujours divisible par $P_{\text{CSTC}}(2N)$. La Table 2.1 regroupe les valeurs calculées ; les colonnes "facteur" et "ratio" indiquent le facteur prouvé ($A_{\text{V}}(2N - 1)$ pour les tailles multiples de 4) ou conjecturé ($P_{\text{CSTC}}(2N)$ pour les tailles non multiples de 4), et le ratio. La suite des ratios, malgré un début prometteur qui évoque les nombres de Catalan, n'apparaît pas dans l'encyclopédie des suites d'entiers [70].

2N	$A_{\text{VH}}(2N)$	Factorisation	Facteur	Ratio
2	1	1	1	1
4	1	1	1	1
6	2	2	1	2
8	5	5	1	5
10	28	$2^2 \cdot 7$	2	14
12	198	$2 \cdot 3^2 \cdot 11$	3	66
14	3146	$2 \cdot 11^2 \cdot 13$	11	286
16	63206	$2 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 17$	26	2431
18	2855320	$2^3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 17^2 \cdot 19$	170	16796
20	163170556	$2^2 \cdot 17^3 \cdot 19^2 \cdot 23$	646	252586
22	10486107790	$2 \cdot 5 \cdot 17^2 \cdot 19^3 \cdot 23^2$	7429	1411510

TAB. 2.1 – Nombres de qVHASM pour les tailles 2 à 22

2.1.5 Invariance par quart de tour

Les formules d'énumération ont été conjecturées par Robbins [69], et démontrées par Kuperberg [46] pour les tailles paires, et par Razumov et Stroganov [68] pour les tailles impaires.

Théorème 2.6 (Kuperberg, Razumov et Stroganov). *Le nombre de QTASM est donné en fonction de la taille par*

$$A_{QT}(4N - 1) = A_{HT}(2N - 1)A(N)^2 \quad (2.9)$$

$$A_{QT}(4N) = A_{HT}(2N)A(N)^2 \quad (2.10)$$

$$A_{QT}(4N + 1) = A_{HT}(2N + 1)A(N)^2 \quad (2.11)$$

L'énumération des qQTASM de taille $4N + 2$, conjecturée dans [29], est un résultat de Jean-Christophe Aval et moi-même, qui fait l'objet des sections suivantes de ce chapitre.

Théorème 2.7 (Aval, Duchon). *Le nombre de qQTASM de taille $4N + 2$ est donné par*

$$A_{QT}(4N + 2) = A_{HT}(2N + 1)A(N)A(N + 1). \quad (2.12)$$

2.1.6 Autres classes de symétrie

Il n'y a pas de conjectures générales pour l'énumération des classes de symétrie restantes, qui font toutes intervenir la symétrie diagonale (DASM, DDASM, TASM). Il existe toutefois une formule conjecturée par Robbins [69] pour les DDASM de taille impaire, et dont la démonstration reste à ce jour un problème ouvert.

Conjecture 2.8 (Robbins). *Les DDASM de tailles impaires sont comptées par*

$$A_{DD}(2N + 1) = \prod_{1 \leq i \leq N} \frac{(3i)!(i - 1)!}{(2i)!(2i - 1)!} \quad (2.13)$$

Pour les autres classes, et pour les DDASM de taille paire, les nombres obtenus par énumération exhaustive ne semblent pas devoir se factoriser en produits de petits nombres premiers, ce qui exclurait au moins des formules à base de produits de factorielles comme celles qui sont déjà connues pour les classes de symétrie sans diagonale.

2.2 Énumération de configurations de glace carrée et formules de Yang-Baxter

La méthode employée par Kuperberg pour démontrer le Théorème 2.1 [44], et adaptée depuis par différents auteurs pour démontrer les autres résultats d'énumération présentés Section 2.1 [46, 67, 68, 57], repose sur le calcul de polynômes générateurs des configurations de glace carrées de certains graphes, dans lesquels des paramètres supplémentaires (dits "paramètres spectraux") sont introduits. Les ingrédients principaux sont la *formule de Yang-Baxter*, qui permet de transformer le graphe tout en conservant les polynômes énumérateurs et de démontrer des propriétés de symétrie de ceux-ci en leurs différentes variables, et l'obtention de suffisamment de spécialisation des variables pour déterminer lesdits polynômes. Dans les travaux déjà cités, les preuves se terminent en se ramenant à l'évaluation de déterminants ou de pfaffiens ; dans la preuve du Théorème 2.7, nous parvenons à nous passer complètement de cette étape en nous appuyant sur des propriétés de symétrie déjà connues.

2.2.1 Conventions et notations

Dans toutes les énumérations, on utilise un paramètre global $a \in \mathbb{C}$, on convient de noter $\bar{x} = 1/x$ pour n'importe quel complexe non nul x , et on définit

$$\sigma(x) = x - \bar{x}. \quad (2.14)$$

Chaque sommet de degré 4 du graphe se voit attribuer un paramètre $x \neq 0$ (le paramètre est en fait associé à l'un des 4 secteurs angulaires définis par les arêtes incidentes), et en fonction des orientations des arêtes incidentes, le sommet prendra un *poids* comme indiqué¹ Figure 2.2.

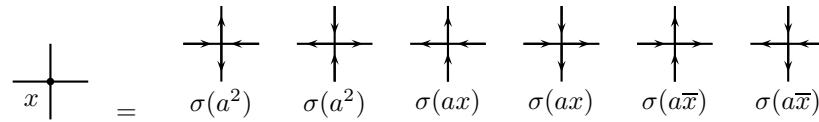


FIG. 2.2 – Les 6 poids possibles pour un sommet

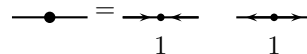
Remarquons que le poids d'un sommet reste inchangé si l'on déplace le paramètre x dans un secteur angulaire voisin tout en le changeant en \bar{x} ; et de même, changer simultanément l'orientation de toutes les arêtes laisse le poids inchangé.

Plutôt que d'attribuer explicitement un paramètre à (un secteur angulaire de) chaque sommet, il sera souvent plus commode d'en attribuer aux différentes lignes qui composent le graphe; le paramètre associé à un secteur angulaire est alors obtenu en divisant le paramètre de la ligne précédant le secteur angulaire dans le sens trigonométrique, par celui de la ligne qui le suit :

$$x \begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \\ y \end{array} = \frac{x}{y} \begin{array}{c} | \\ \text{---} \\ | \end{array}$$

Lorsque cette convention est utilisée, un paramètre explicitement écrit au croisement de deux lignes déjà étiqueté, "remplace" le quotient des paramètres des deux lignes.

Un trait pointillé traversant une ligne, indique que le paramètre associé à cette ligne est différent de part et d'autre du trait pointillé. De plus, nous utilisons un sommet additionnel de degré 2 pour indiquer que les deux arêtes incidentes à ce sommet doivent être soit toutes deux entrantes, soit toutes deux sortantes (ce qui correspond à dire que l'arête change de sens en traversant ce sommet additionnel) :



Enfin, nous utilisons un graphe, dans lequel certaines arêtes peuvent être déjà orientées, pour figurer la somme des poids de toutes les orientations eulériennes de ce graphe, le poids d'une orientation étant défini comme le produit des poids des sommets. Dans cette convention, les arêtes incidentes à des sommets de degré 1 (typiquement, au "bord" de la figure) ont un rôle particulier : la figure représente alors la fonction qui, à chaque orientation possible de l'ensemble de ces arêtes "pendantes", associe la somme des poids des orientations eulériennes compatibles avec l'orientation de ces arêtes fixées.

Dans la suite de ce chapitre, beaucoup de fonctions ont un nombre important de variables; la notation \mathbf{x}_N désigne un vecteur de variables (x_1, \dots, x_N) , et la notation $\mathbf{x}_N \setminus x_i$, le même vecteur privé de la variable x_i . La plupart du temps, les fonctions sont symétriques en les variables en question, et l'ordre des variables restantes n'est donc pas important.

2.2.2 Fonctions d'énumération d'ASM

Avec les conventions précédemment définies, nous pouvons définir un certain nombre de fonctions de partition, qui sont immédiatement interprétables comme des sommations, sur toutes les ASM d'une certaine taille et d'une certaine classe de symétrie, de poids appropriés.

¹La convention est ici celle adoptée par Kuperberg; Razumov et Stroganov utilisent une convention différente, correspondant à remplacer tous les paramètres spectraux x par leurs inverses, ou à changer l'orientation du plan.

$$Z(N; x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N) =$$

FIG. 2.3 – Fonction de partition pour les ASM de taille N

$$Z_{\text{HT}}(2N; x_1, \dots, x_{N-1}, y_1, \dots, y_N, x, y) =$$

$$= Z_{\text{HT}}(2N + 1; x_1, \dots, x_N, y_1, \dots, y_N, x, y)$$

FIG. 2.4 – Fonctions de partition pour les HTASM

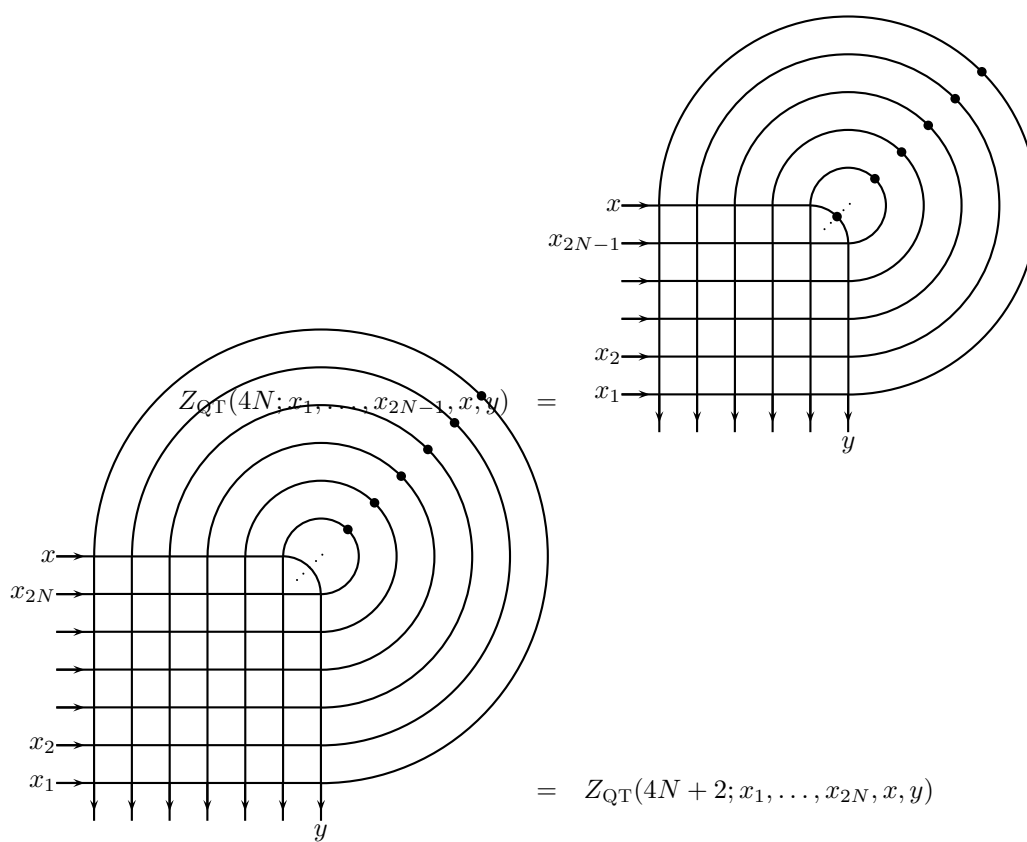


FIG. 2.5 – Fonctions de partitions pour les (q)QTASM de taille paire

Notons que la grille que nous avons utilisée pour définir $Z_{\text{QT}}(4N)$ diffère légèrement de celle utilisée par Kuperberg (le traitement des sommets centraux est différent, et la ligne xy ne porte qu'un seul paramètre x_{2N} chez Kuperberg).

Remarquons que, pour chacune des fonctions de partitions, fixer la même valeur à toutes les variables x_i, y_j, x et y , revient à attribuer un poids $\sigma(a)$ à chaque sommet qui, dans les matrices à signes alternants, correspond à un 0, et poids $\sigma(a^2) = (a + \bar{a})\sigma(a)$ à chaque sommet correspondant à ± 1 . On obtient alors, en fixant la valeur de a de telle sorte que $a + \bar{a} = t^{1/2}$, et à un facteur multiplicatif près, le polynôme énumérateur des ASM de la classe correspondante, où la variable t compte le nombre de -1 dans la zone de la matrice correspondant au graphe (soit, le nombre d'orbites de -1 sous l'action du groupe de symétries définissant la classe; pour les qQTASM, un éventuel -1 parmi les 4 coefficients centraux n'est pas compté). Plus précisément :

Proposition 2.9. *Soient $F_N(t)$, $F_{2N}^{\text{HT}}(t)$, et $F_{4N}^{\text{QT}}(t)$, respectivement, les polynômes énumérateurs des ASM, HTASM, QTASM de tailles $N, 2N, 4N$, selon le nombre d'orbites, sous l'action du groupe de symétries définissant la classe, de coefficients -1 (non centraux, pour F_{2N+1}^{HT}) des matrices à signes alternants; pour les qQTASM, dont exactement 2 des 4 coefficients centraux sont nuls, les 2 autres étant égaux, soit $F_{4N+2}^{\text{QT}+}(t)$ (respectivement, $F_{4N+2}^{\text{QT}-}(t)$) le polynôme énumérateur des qQTASM de taille $4N + 2$ ayant 2 coefficients centraux positifs (respectivement, négatifs), selon le nombre d'orbites de taille 4 de coefficients négatifs; enfin, pour les HTASM de taille impaire, dont le coefficient central vaut ± 1 , soit $F_{2N+1}^{\text{HT}+}(t)$ (respectivement, $F_{2N+1}^{\text{HT}-}(t)$) le polynôme énumérateur selon le nombre d'orbites de coefficients négatifs non centraux, des HTASM de taille $2N + 1$ ayant un coefficient central positif (respectivement, négatif).*

Alors, on a

$$Z(N; \mathbf{1}) = (\sigma(a))^{N^2} t^{N/2} F_N(t) \quad (2.15)$$

$$Z_{\text{HT}}(2N; \mathbf{1}) = (\sigma(a))^{2N^2} t^{N/2} F_{2N}^{\text{HT}}(t) \quad (2.16)$$

$$Z_{\text{QT}}(4N; \mathbf{1}) = (\sigma(a))^{4N^2 - 1} t^{N/2} F_{4N}^{\text{QT}}(t) \quad (2.17)$$

$$Z_{\text{HT}}(2N + 1; \mathbf{1}) = (\sigma(a))^{2N^2 + 2N} t^{N/2} \left(F_{2N+1}^{\text{HT}+}(t) + \sqrt{t} F_{2N+1}^{\text{HT}-}(t) \right) \quad (2.18)$$

$$Z_{\text{QT}}(4N + 2; \mathbf{1}) = \sigma(a)^{(2N+1)^2 - 1} t^{N/2} \left(F_{4N+2}^{\text{QT}+}(t) + \sqrt{t} F_{4N+2}^{\text{QT}-}(t) \right) \quad (2.19)$$

Démonstration. Pour $Z(N; \mathbf{1})$, une ASM ayant k coefficients valant -1 a aussi $N + k$ coefficients valant 1, et donc sa contribution à la fonction de partition est $(\sigma(a))^{N^2} \sqrt{t}^{N+2k}$, soit exactement $(\sigma(a))^{N^2} t^{N/2}$ fois sa contribution à $F_N(t)$.

Pour $Z_{\text{HT}}(2N; \mathbf{1})$, une HTASM ayant $2k$ coefficients valant -1 a $2N + 4k$ coefficients non nuls, dont exactement la moitié deviennent des sommets de la grille; elle contribue donc $(\sigma(a))^{2N^2} \sqrt{t}^{N+2k}$ à la fonction de partition, et t^k au polynôme énumérateur.

Pour $Z_{\text{HT}}(2N + 1; \mathbf{1})$, une HTASM ayant $2k$ coefficients valant -1 (donc un coefficient central positif) a $2N + 1 + 4k$ coefficients non nuls au total, dont $N + 2k$ deviennent des sommets de la grille, et sa contribution est de $(\sigma(a))^{2N^2 + 2N} \sqrt{t}^{N+2k}$ à la fonction de partition, et t^k au polynôme énumérateur; et une HTASM ayant $2k + 1$ coefficients valant -1 (dont le coefficient central) a $2N + 4k + 2$ coefficients non nuls, dont $N + 2k + 1$ deviennent des coefficients de la grille, et contribue donc $(\sigma(a))^{2N^2 + 2N} \sqrt{t}^{N+2k+1}$ à la fonction de partition et t^k au polynôme énumérateur.

Pour les (q)QTASM, la grille considérée n'a pas de sommet correspondant à l'orbite des 4 coefficients centraux. Pour les QTASM (de taille $4N$), ces 4 coefficients centraux sont tous nuls, et pour un QTASM ayant $4k$ coefficients -1 , $N + 2k$ sommets de la grille contribuent un poids $\sigma(a^2)$; la contribution à $Z_{\text{QT}}(4N; \mathbf{1})$ est donc de $\sigma(a)^{4N^2 - 1} \sqrt{t}^{N+2k}$, et la contribution à $F_{4N}^{\text{QT}}(t)$, de t^k .

Pour les qQTASM (de taille $4N + 2$), un qQTASM ayant 2 coefficients centraux positifs et k orbites de -1 , aura dans sa grille $N + 2K$ sommets valués $\sigma(a^2)$, et donc une contribution de $\sigma(a)^{(2N+1)^2 - 1} \sqrt{t}^{N+2k}$

à $Z_{\text{QT}}(4N + 2; \mathbf{1})$ (et t^k à $F_{4N+2}^{\text{QT}+}(t)$). Un qQTASM ayant coefficients centraux négatifs et k orbites de 4 coefficients négatifs, aura $N + 1 + 2K$ sommets valués $\sigma(a^2)$ dans sa grille, et donc une contribution de $\sigma(a)^{(2N+1)^2-1} \sqrt{t}^{N+1+2k}$ à $Z_{\text{QT}}(4N + 2; \mathbf{1})$ et t^k à $F_{4N+2}^{\text{QT}-}(t)$. ■

La formulation un peu alambiquée de la proposition précédente se simplifie considérablement si on ne s'intéresse qu'aux *nombre*s de FPL de chaque classe : il suffit de poser $t = 1$, ou encore $a = e^{i\pi/3}$; notons qu'on a alors $\sigma(a) = \sigma(a^2) = i\sqrt{3}$.

Corollaire 2.10. *Pour $a = e^{i\pi/3}$, on a*

$$Z(N; \mathbf{1}) = (i\sqrt{3})^{N^2} A(N) \tag{2.20}$$

$$Z_{\text{HT}}(2N; \mathbf{1}) = (-1)^N 3^{N^2} A_{\text{HT}}(2N) \tag{2.21}$$

$$Z_{\text{QT}}(4N; \mathbf{1}) = -i\sqrt{3} 3^{2N^2-1} A_{\text{QT}}(4N) \tag{2.22}$$

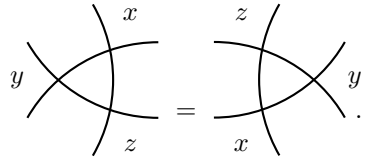
$$Z_{\text{QT}}(4N + 2; \mathbf{1}) = 3^{2N^2+2N} A_{\text{QT}}(4N + 2). \tag{2.23}$$

Les résultats obtenus sont souvent plus forts que de simples résultats d'énumération : ils fournissent en général des expressions ou des identités portant sur les fonctions de partition Z , et donc sur les polynômes énumérateurs selon le nombre d'orbites de -1 .

2.2.2.1 Transformations locales : équation de Yang-Baxter

Au cœur de toutes les manipulations de fonctions de partition que nous avons définies, se trouve l'équation de Yang-Baxter :

Lemme 2.11 (équation de Yang-Baxter). *Si $xyz = \bar{a}$, alors*



$$\tag{2.24}$$

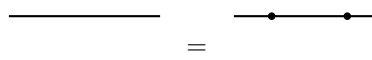
L'équation de Yang-Baxter, ainsi que toutes les autres identités du même genre qui suivent, doit être interprétée comme signifiant que l'égalité est vraie quelles que soient les orientations des arêtes sortantes, du moment qu'elles sont les mêmes dans le membre gauche et le membre droit ; en conséquence, chaque fois qu'un graphe contient un "triangle Yang-Baxter", celui-ci peut être remplacé par le triangle correspondant à l'autre membre de l'équation, sans modifier la fonction de partition.

Une autre propriété de transformation locale qui se révèle utile consiste à jouer avec les changements d'orientation au moyen de sommets de degré 2.

Lemme 2.12.



$$\tag{2.25}$$



$$\tag{2.26}$$

La première conséquence de (2.24) est la suivante ; la preuve en est directement tirée de [46].

Lemme 2.13.

$$\begin{array}{c} y \rightarrow \\ x \rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \cdots \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \leftarrow \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} = \begin{array}{c} x \rightarrow \\ y \rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \cdots \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \leftarrow \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \quad (2.27)$$

Dans l'équation (2.27), il faut considérer que les lignes verticales portent chacune un paramètre, ces paramètres se retrouvant dans les deux membres de l'équation. L'équation reste vraie si l'orientation des deux arêtes horizontales du bord gauche (ou droit) est inversée dans les deux membres de l'équation, tant qu'elles restent orientées dans le même sens.

Démonstration. Multiplions le membre gauche par $\sigma(a\bar{z})$, avec $z = \bar{a}x\bar{y}$. On a alors

$$\begin{aligned} \sigma(a\bar{z}) \begin{array}{c} y \rightarrow \\ x \rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \cdots \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \leftarrow \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} &= \begin{array}{c} x \rightarrow \\ y \rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \leftarrow \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\ &= \begin{array}{c} x \rightarrow \\ y \rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \leftarrow \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\ &= \begin{array}{c} x \rightarrow \\ y \rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \cdots \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \leftarrow \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\ &= \begin{array}{c} x \rightarrow \\ y \rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \cdots \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \leftarrow \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\ &= \begin{array}{c} x \rightarrow \\ y \rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \cdots \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \leftarrow \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \sigma(a\bar{z}) \end{aligned}$$

■

Une autre transformation élémentaire est la suivante :

Lemme 2.14.

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \circlearrowleft = (\sigma(az) + \sigma(a^2)) \left(\begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} + \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} \right) \quad (2.28)$$

À son tour, elle a pour conséquence un pendant du Lemme 2.13 lorsque, à une extrémité, les arêtes sont contraintes à avoir des orientations contraires :

Lemme 2.15.

$$\begin{array}{c} y \rightarrow \\ x \rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \leftarrow \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \cdots \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \leftarrow \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} = \frac{\sigma(a^2) + \sigma(x\bar{y})}{\sigma(a^2y\bar{x})} \begin{array}{c} x \rightarrow \\ y \rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \leftarrow \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \cdots \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \leftarrow \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \quad (2.29)$$

$$\begin{array}{c} y \rightarrow \\ x \rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \leftarrow \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} = \frac{\sigma(x\bar{y})}{\sigma(a^2y\bar{x})} \begin{array}{c} x \rightarrow \\ y \rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \leftarrow \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} + \frac{\sigma(a^2)}{\sigma(a^2y\bar{x})} \begin{array}{c} x \rightarrow \\ y \rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \leftarrow \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \quad (2.30)$$

$$\begin{array}{c} y \rightarrow \\ x \rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \leftarrow \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} = \frac{\sigma(x\bar{y})}{\sigma(a^2y\bar{x})} \begin{array}{c} x \rightarrow \\ y \rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \leftarrow \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} + \frac{\sigma(a^2)}{\sigma(a^2y\bar{x})} \begin{array}{c} x \rightarrow \\ y \rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| \leftarrow \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \quad (2.31)$$

Démonstration. Le même schéma de preuve que pour le Lemme 2.13, suivi du Lemme 2.14, donne (2.29). Les deux autres identités sont simplement les parties paire et impaire en x (dans un ordre qui dépend de la parité de la longueur de la ligne) de (2.29). ■

Enfin, une autre conséquence de l'équation de Yang-Baxter est que, sous certaines conditions, une ligne changeant de paramètre peut "traverser" une grille :

Lemme 2.16.

$$(2.32)$$

(l'égalité est valide quelles que soient les dimensions de la grille que "traverse" la ligne $x/\bar{a}x$)

Démonstration. Le triangle où la ligne $x/\bar{a}x$ change de paramètre permet d'appliquer l'équation (2.24) et, en itérant, de traverser toute une ligne (la portion de ligne verticale a toujours pour paramètre $\bar{a}x$) :

En itérant ligne par ligne, on obtient le résultat. ■

2.2.2.2 Quelques propriétés des fonctions de partition

Rappelons qu'un *polynôme de Laurent* d'une variable x est un polynôme en x et $1/x$. Le poids d'un sommet étant toujours sous la forme d'un polynôme de Laurent en les variables x_i, y_j, x et y , toutes nos fonctions de partition sont des polynômes de Laurent en ces variables.

Plus précisément, pour chaque variable z , le poids d'un sommet est soit constant par rapport à cette variable, soit la somme de deux termes dont un est en z et l'autre en $1/z$. Par conséquent, pour chaque variable et chaque ASM contribuant à la fonction de partition, le poids correspondant à cet ASM est de la forme

$$\sum_{0 \leq i \leq k} a_i z^{-k+2i}, \tag{2.33}$$

les termes de plus haut et de plus bas degré sont de degrés opposés, et tous sont de même parité. Pour peu que cette parité soit la même pour tous les ASM, cette propriété s'étend à la fonction de partition.

Lorsque tous les monômes d'un polynôme de Laurent ont leur degré compris entre $-k$ et k , nous parlerons de *polynôme de Laurent centré de largeur k* . Une telle fonction est, comme un polynôme classique, entièrement déterminée par ses valeurs en $2k + 2$ points ; lorsque, comme c'est le cas ici, on a affaire à des polynômes de Laurent de plusieurs variables, il est toujours possible de considérer qu'il s'agit de polynômes d'une des variables, à coefficients dans le corps des fractions rationnelles des autres variables (et donc, d'exprimer les points où l'on évalue le polynôme de Laurent en fonction des autres variables). Si de plus la fonction, en tant que fonction de la variable considérée, est paire (pour k pair) ou impaire (pour k impair), alors $k + 1$ évaluations suffisent, pour peu que les points d'évaluations ne soient pas opposés les uns aux autres.

Cette dernière remarque justifie l'intérêt de la proposition suivante :

Proposition 2.17. *Les fonctions $Z(N; \mathbf{x}_N, \mathbf{y}_N)$, $Z_{\text{HT}}(2N; \mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{y}_N, x, y)$, $Z_{\text{HT}}(2N + 1, \mathbf{x}_N, \mathbf{y}_N, x, y)$ et $Z_{\text{QT}}(2m; \mathbf{x}_{2m-1}, x, y)$ sont des polynômes de Laurent centrés de toutes leurs variables, avec les demi-largeurs et parités suivantes :*

- $Z(N; \dots)$ a demi-largeur $N - 1$, et la parité de $N - 1$, en chacune de ses variables ;
- $Z_{\text{HT}}(2N; \dots)$ a demi-largeur $N - 1$ et est impair en chacune des variables x_i et y_j , et demi-largeur N (sans parité) en x et en y ;
- $Z_{\text{HT}}(2N + 1; \dots)$ a demi-largeur $2N$ et est pair en chacune des variables x_i et y_j , et demi-largeur $N + 1$ (sans parité) en x et en y ;
- $Z_{\text{QT}}(2m; \dots)$ a demi-largeur $2m - 3$ et est pair en chacune des variables x_i , et demi-largeur $m - 1$ (sans parité) en x et en y ;
- enfin, dans $Z_{\text{QT}}(4N + 2; \dots)$, tous les monômes ont la même parité en x qu'en y , et inversement, dans $Z_{\text{QT}}(4N; \dots)$, les monômes pairs en x sont impairs en y et vice versa (i.e., $Z_{\text{QT}}(4N + 2; \mathbf{x}_{2N-1}, x, x)$ est pair en x , et $Z_{\text{QT}}(4N; \mathbf{x}_{2N}, x, x)$ est impair en x); et de même, dans $Z_{\text{HT}}(2N; \dots)$ les monômes pairs en x sont impairs en y et vice versa.

Démonstration. Le fait que les fonctions de partitions soient toutes des polynômes de Laurent est clair : chaque sommet a un poids qui est un polynôme de Laurent des variables, et chaque fonction de partition est une somme finie de produits finis de tels poids.

Pour obtenir les largeurs et parités, il suffit d'examiner, dans la contribution d'un ASM donné à la fonction de partition, combien de sommets portent un poids qui est un polynôme de Laurent impair, de demi-largeur 1, en une variable donnée :

- Pour $Z(N; \dots)$, chaque variable apparaît dans les paramètres des N sommets d'une ligne ou d'une colonne. Dans cette ligne ou colonne, un nombre impair de sommets seront occupés par des coefficients non nuls de la matrice et ont donc un poids constant $\sigma(a^2)$, les autres contribuent 1 à la demi-largeur.
- Pour $Z_{\text{HT}}(m; \dots)$ et les variables x_i et y_j , le raisonnement est le même : m sommets portent un paramètre qui dépend de la variable, parmi lesquels un nombre impair a poids constant, les autres contribuant 1 à la demi-largeur. Pour les variables x et y il y a $\lceil m/2 \rceil$ sommets portant un poids dépendant de la variable, mais la parité du nombre de poids constants parmi eux n'est pas fixée.
- Pour $Z_{\text{QT}}(2m; \dots)$ et les variables x et y , le raisonnement est le même que précédemment. Pour les x_i , nous ne démontrons la proposition que pour la variable x_1 , les autres découleront de la propriété de symétrie. La variable x_1 apparaît dans les paramètres de $2m - 2$ sommets (la ligne étiquetée x_1 comporte $2m - 1$ sommets, mais l'un d'entre eux est un auto-croisement de la ligne et a paramètre 1), parmi lesquels exactement 1 correspondra à un 1 de la matrice et aura poids constant (dans un (q)QTASM, l'unique 1 de la première colonne ne peut être dans un coin de la matrice sans violer la condition d'invariance par quart de tour) ; il reste donc $2m - 3$ sommets qui contribuent chacun 1 à la demi-largeur et à la parité.
- Pour la parité totale en x et y de $Z_{\text{QT}}(2m; \dots)$, il suffit de noter que, dans les deux cas, la ligne xy comprend un nombre pair de sommets de degré 4, plus un sommet de degré 2 dans le cas où m est pair. Entre les deux extrémités de la ligne, l'orientation des arêtes subit un nombre pair de changements de sens (la première arête est entrante, la dernière, sortante). Par conséquent, le nombre de sommets de la ligne qui contribuent à la parité en x ou en y (les non-changements de sens) est pair dans le cas de $Z_{\text{QT}}(4N + 2; \dots)$, et impair dans le cas de $Z_{\text{QT}}(4N; \dots)$.
- Pour la parité des monômes de $Z_{\text{HT}}(2N; \dots)$, la ligne xy a également un nombre pair de sommets, pour un nombre impair de changements de sens, et donc il doit y avoir un nombre impair de sommets qui contribuent à la parité soit en x , soit en y .

■

Le Lemme 2.13 nous donne enfin des propriétés de symétrie en diverses variables de nos fonctions de partition :

Lemme 2.18. *Les fonctions $Z(N; \mathbf{x}_N, \mathbf{y}_N)$ et $Z_{\text{HT}}(m; \mathbf{x}_{N-1}, \mathbf{y}_N, x, y)$ sont symétriques en leurs variables x_i en leurs variables y_j , séparément, et les fonctions $Z_{\text{QT}}(2m; \mathbf{x}_{N-1}, x, y)$ sont symétriques en leurs variables x_i .*

Démonstration. Pour $Z(N; \dots)$ et $Z_{\text{HT}}(m; \dots)$, la symétrie en deux variables consécutives x_i et x_{i+1} (ou y_j et y_{j+1}) découle immédiatement de l'application du Lemme 2.13 aux lignes (ou colonnes) correspondantes. Pour $Z_{\text{QT}}(2m; \dots)$, c'est à peine plus compliqué : c'est le Lemme 2.12 qui permet au croisement supplémentaire de "traverser" la ligne de changement d'orientation entre l'application du Lemme 2.13 aux lignes et aux colonnes x_i et x_j . ■

Pour $Z_{\text{QT}}(2m, \dots)$ et $Z_{\text{HT}}(2N; \dots)$, il existe de plus une symétrie, au moins partielle, en x et y :

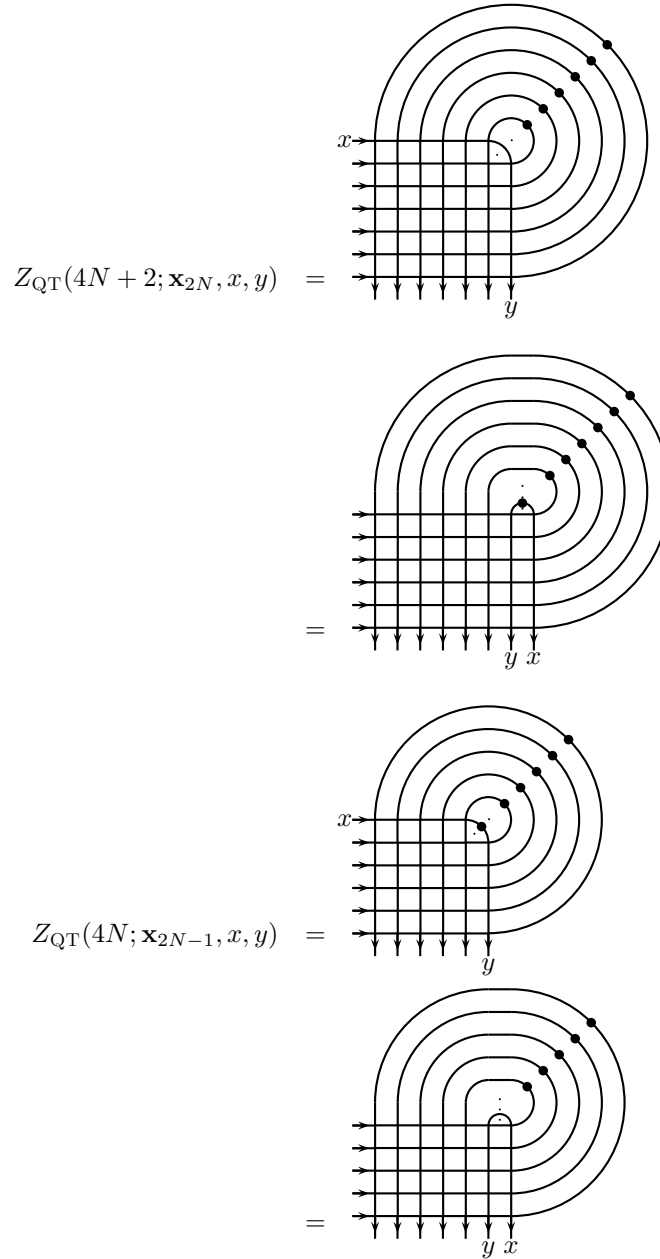
Lemme 2.19. $Z_{\text{QT}}(4N + 2; \dots)$ est symétrique en ses variables x et y , et

$$Z_{\text{QT}}(4N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, y) = \frac{\sigma(a^2) + \sigma(x\bar{y})}{\sigma(a^2 y \bar{x})} Z_{\text{QT}}(4N; \mathbf{x}_{2N-1}, y, x) \quad (2.34)$$

$$Z_{\text{HT}}(2N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, y) = \frac{\sigma(a^2) + \sigma(x\bar{y})}{\sigma(a^2 y \bar{x})} Z_{\text{HT}}(2N; \mathbf{x}_{2N-1}, y, x). \quad (2.35)$$

Démonstration. Le Lemme 2.12 permet de réécrire les deux fonctions de partition en faisant "passer" la

ligne x à travers la ligne de sommets de degré 2, au prix de changements de sens au bord :



Pour $Z_{\text{QT}}(4N+2; \dots)$, le Lemme 2.13 permet alors d'échanger les lignes x et y , prouvant la symétrie. Pour $Z_{\text{QT}}(4N; \dots)$, c'est le Lemme 2.15 qui permet de conclure.

Enfin, pour $Z_{\text{HT}}(2N; \dots)$, le Lemme 2.15 donne directement (2.35) sans aucune modification du graphe. ■

Enfin, dans le cas particulier où $a = e^{i\pi/3}$, la fonction de partition $Z(N; \dots)$ acquiert une symétrie supplémentaire :

Lemme 2.20. *Pour $a = e^{i\pi/3}$, la fonction de partition $Z(N; \mathbf{x}_N, \mathbf{y}_N)$ est symétrique en ses $2N$ variables.*

2.2.3 Énumération des qQTASM

Nous en venons maintenant à la preuve de la formule d'énumération des qQTASM de taille $4N + 2$. Il s'agit d'un résultat obtenu en collaboration avec Jean-Christophe Aval. Sur le fond, la technique est très similaire à celle employée par Kuperberg et ceux qui l'ont suivi; une originalité, toutefois, est que les fonctions de partition sont exactement obtenues comme produits de fonctions de partition correspondant aux classes de symétrie d'ASM intervenant dans la formule énumérative – dans les preuves précédentes des formules (2.9-2.11), les facteurs $A(N)^2$ apparaissent ensemble. Un autre point est que la preuve se passe presque complètement de calculs de déterminants (ceux-ci interviennent dans la preuve du Lemme 2.20).

La formule découle du résultat suivant, où les variables y_i ont systématiquement été renommées en x_j , avec des indices qui suivent ceux des variables x_i déjà présentes. Rappelons que la symétrie des différentes fonctions de partition en leurs jeux de variable est déjà connue :

Théorème 2.21 (Aval, Duchon). *Pour $a = e^{i\pi/3}$, on a*

$$\sigma(a)Z_{\text{QT}}(4N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, y) = Z_{\text{HT}}(2N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, y)Z(N; \mathbf{x}_{2N-1}, x)Z(N; \mathbf{x}_{2N-1}, y) \quad (2.36)$$

$$\sigma(a)Z_{\text{QT}}(4N + 2; \mathbf{x}_{2N}, x, y) = Z_{\text{HT}}(2N + 1; \mathbf{x}_{2N}, x, y)Z(N + 1; \mathbf{x}_{2N}, x, y)Z(N; \mathbf{x}_{2N}) \quad (2.37)$$

Pour $x = y$, l'équation (2.36) était déjà connue. L'équation (2.37) est *a priori* nouvelle, les qQTASM n'ayant pas encore attiré beaucoup d'attention. Pour d'autres valeurs de a , les fonctions de partition $Z_{\text{QT}}(2m; \dots)$ telles que nous les avons définies (avec deux variables x et y distinctes) ne semblent pas se factoriser. Enfin, notons que, toutes les fonctions de partition hormis $Z_{\text{HT}}(m; \dots)$ étant déjà symétriques en toutes leurs (nouvelles) variables x_i , nous obtenons en corollaire un résultat similaire pour $Z_{\text{HT}}(m; \dots)$.

2.2.3.1 Parties paires et impaires des fonctions de partition

Tout d'abord, notons que, pour chaque équation, les membres gauche et droit sont des polynômes de Laurent, de même demie-largeur, en les variables x et y . Il est plus pratique de manipuler séparément les parties paire et impaire en x , ou, ce qui revient au même, les parties correspondant, pour les séries $Z_{\text{QT}}(2m; \dots)$ et $Z_{\text{HT}}(m; \dots)$, les séries partielles correspondant à spécifier l'orientation des arêtes où se rejoignent les lignes x et y . C'est cette orientation de l'arête "charnière" qui préside au choix des notations.

Considérons donc les séries $Z_{\text{QT}}^{\rightarrow}(4N, \mathbf{x}_{2N-1}, x, y)$ et $Z_{\text{QT}}^{\leftarrow}(4N, \mathbf{x}_{2N-1}, x, y)$, qui sont respectivement les parties impaire et paire en x de $Z_{\text{QT}}(4N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, y)$; $Z_{\text{QT}}^{\rightarrow}(4N + 2; \mathbf{x}_{2N}, x, y)$ et $Z_{\text{QT}}^{\leftarrow}(4N + 2; \mathbf{x}_{2N}, x, y)$, respectivement parties impaire et paire en x de $Z_{\text{QT}}(4N + 2; \mathbf{x}_{2N}, x, y)$; $Z_{\text{HT}}^{\rightarrow}(2N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, y)$ et $Z_{\text{HT}}^{\leftarrow}(2N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, y)$, respectivement parties ayant la parité de N et celle de $N - 1$ en x , de $Z_{\text{HT}}(2N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, y)$; et $Z_{\text{HT}}^{\rightarrow}(2N + 1; \mathbf{x}_{2N}, x, y)$ et $Z_{\text{HT}}^{\leftarrow}(2N + 1; \mathbf{x}_{2N}, x, y)$, respectivement parties ayant la parité de $N - 1$ et celle de N en x , de $Z_{\text{HT}}(2N + 1; \mathbf{x}_{2N}, x, y)$:

$$\begin{aligned} Z_{\text{QT}}^{\rightarrow}(4N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, y) &= \frac{1}{2} (Z_{\text{QT}}(4N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, y) - Z_{\text{QT}}(4N; \mathbf{x}_{2N-1}, -x, y)) \\ Z_{\text{QT}}^{\leftarrow}(4N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, y) &= \frac{1}{2} (Z_{\text{QT}}(4N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, y) + Z_{\text{QT}}(4N; \mathbf{x}_{2N-1}, -x, y)) \\ Z_{\text{QT}}^{\rightarrow}(4N + 2; \mathbf{x}_{2N}, x, y) &= \frac{1}{2} (Z_{\text{QT}}(4N + 2; \mathbf{x}_{2N}, x, y) - Z_{\text{QT}}(4N + 2; \mathbf{x}_{2N}, -x, y)) \\ Z_{\text{QT}}^{\leftarrow}(4N + 2; \mathbf{x}_{2N}, x, y) &= \frac{1}{2} (Z_{\text{QT}}(4N + 2; \mathbf{x}_{2N}, x, y) + Z_{\text{QT}}(4N + 2; \mathbf{x}_{2N}, -x, y)) \\ Z_{\text{HT}}^{\rightarrow}(2N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, y) &= \frac{1}{2} (Z_{\text{HT}}(2N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, y) + (-1)^N Z_{\text{HT}}(2N; \mathbf{x}_{2N-1}, -x, y)) \\ Z_{\text{HT}}^{\leftarrow}(2N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, y) &= \frac{1}{2} (Z_{\text{HT}}(2N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, y) + (-1)^{N-1} Z_{\text{HT}}(2N; \mathbf{x}_{2N-1}, -x, y)) \\ Z_{\text{HT}}^{\rightarrow}(2N + 1; \mathbf{x}_{2N}, x, y) &= \frac{1}{2} (Z_{\text{HT}}(2N + 1; \mathbf{x}_{2N}, x, y) + (-1)^{N-1} Z_{\text{HT}}(2N + 1; \mathbf{x}_{2N}, -x, y)) \\ Z_{\text{HT}}^{\leftarrow}(2N + 1; \mathbf{x}_{2N}, x, y) &= \frac{1}{2} (Z_{\text{HT}}(2N + 1; \mathbf{x}_{2N}, x, y) + (-1)^N Z_{\text{HT}}(2N + 1; \mathbf{x}_{2N}, -x, y)) \end{aligned}$$

Avec ces notations, les équations (2.36) et (2.37) sont équivalentes aux suivantes, qui ont l'avantage de porter sur des polynômes de Laurent qui sont pairs ou impairs en chacune des variables x et y :

$$\sigma(a)Z_{\text{QT}}^{\rightarrow}(4N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, y) = Z_{\text{HT}}^{\rightarrow}(2N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, y)Z(N; \mathbf{x}_{2N-1}, x)Z(N; \mathbf{x}_{2N-1}, y) \quad (2.38)$$

$$\sigma(a)Z_{\text{QT}}^{\leftarrow}(4N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, y) = Z_{\text{HT}}^{\leftarrow}(2N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, y)Z(N; \mathbf{x}_{2N-1}, x)Z(N; \mathbf{x}_{2N-1}, y) \quad (2.39)$$

$$\sigma(a)Z_{\text{QT}}^{\downarrow}(4N+2; \mathbf{x}_{2N}, x, y) = Z_{\text{HT}}^{\downarrow}(2N+1; \mathbf{x}_{2N}, x, y)Z(N+1; \mathbf{x}_{2N}, x, y)Z(N; \mathbf{x}_{2N}) \quad (2.40)$$

$$\sigma(a)Z_{\text{QT}}^{\uparrow}(4N+2; \mathbf{x}_{2N}, x, y) = Z_{\text{HT}}^{\uparrow}(2N+1; \mathbf{x}_{2N}, x, y)Z(N+1; \mathbf{x}_{2N}, x, y)Z(N; \mathbf{x}_{2N}) \quad (2.41)$$

Les équations (2.34) et (2.35) du Lemme 2.19 peuvent se réécrire en en prenant les parties paire et impaire : en posant $S_0(x, y) = \sigma(x\bar{y})/\sigma(a^2y\bar{x})$ et $S_1(x, y) = \sigma(a^2)/\sigma(a^2y\bar{x})$, il vient

$$Z_{\text{QT}}^{\rightarrow}(4N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, y) = S_1(x, y)Z_{\text{QT}}^{\rightarrow}(4N; \mathbf{x}_{2N-1}, y, x) + S_0(x, y)Z_{\text{QT}}^{\leftarrow}(4N; \mathbf{x}_{2N-1}, y, x) \quad (2.42)$$

$$Z_{\text{QT}}^{\leftarrow}(4N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, y) = S_1(x, y)Z_{\text{QT}}^{\leftarrow}(4N; \mathbf{x}_{2N-1}, y, x) + S_0(x, y)Z_{\text{QT}}^{\rightarrow}(4N; \mathbf{x}_{2N-1}, y, x) \quad (2.43)$$

$$Z_{\text{HT}}^{\downarrow}(2N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, y) = S_1(x, y)Z_{\text{HT}}^{\downarrow}(2N; \mathbf{x}_{2N-1}, y, x) + S_0(x, y)Z_{\text{HT}}^{\uparrow}(2N; \mathbf{x}_{2N-1}, y, x) \quad (2.44)$$

$$Z_{\text{HT}}^{\uparrow}(2N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, y) = S_1(x, y)Z_{\text{HT}}^{\uparrow}(2N; \mathbf{x}_{2N-1}, y, x) + S_0(x, y)Z_{\text{HT}}^{\downarrow}(2N; \mathbf{x}_{2N-1}, y, x). \quad (2.45)$$

Notons que les membres gauche et droit de chacune des équations (2.38-2.41) sont des polynômes de Laurent en x , pairs ou impairs, de demie-largeurs respectives $2N-1$, $2N-2$, $2N$, et $2N-1$. Pour prouver chacune des identités, il suffit donc de trouver un nombre de spécialisations de la variable x au moins supérieur de 1 à la demie-largeur (et deux à deux non opposées) pour lesquelles l'égalité est vraie.

2.2.3.2 Spécialisations

Les premiers résultats de spécialisation sont dûs à Kuperberg [46]. Les autres s'en inspirent fortement.

Lemme 2.22 (spécialisations de Z ; Kuperberg). *Posons*

$$A(x_{N+1}, \mathbf{x}_{2N} \setminus \{x_1, x_{N+1}\}) = \prod_{2 \leq k \leq N} \sigma(ax_k \bar{x}_{N+1}) \prod_{N+1 \leq k \leq 2N} \sigma(a^2 x_{N+1} \bar{x}_k),$$

$$\bar{A}(x_{N+1}, \mathbf{x}_{2N} \setminus \{x_1, x_{N+1}\}) = \prod_{2 \leq k \leq N} \sigma(ax_{N+1} \bar{x}_k) \prod_{N+1 \leq k \leq 2N} \sigma(a^2 x_k \bar{x}_{N+1}).$$

Alors on a

$$Z(N; \bar{a}x_{N+1}, \mathbf{x}_{2N} \setminus x_1) = \bar{A}(x_{N+1}, \mathbf{x}_{2N} \setminus \{x_1, x_{N+1}\})Z(N-1; \mathbf{x}_{2N} \setminus \{x_1, x_{N+1}\}) \quad (2.46)$$

$$Z(N; ax_{N+1}, \mathbf{x}_{2N} \setminus x_1) = A(x_{N+1}, \mathbf{x}_{2N} \setminus \{x_1, x_{N+1}\})Z(N-1; \mathbf{x}_{2N} \setminus \{x_1, x_{N+1}\}). \quad (2.47)$$

Démonstration. La symétrie partielle de la fonction $Z(N; \dots)$ en ses variables (Lemme 2.18) permet de permuter lignes et colonnes. Pour prouver (2.46), on place la ligne x_1 en bas de la grille, et la colonne x_{N+1} à gauche. Pour $x_1 = \bar{a}x_{N+1}$, le paramètre du sommet est \bar{a} , ce qui se traduit, pour un sommet de type, par un poids nul. Cette valeur de x_1 "tue" ainsi la contribution de toutes les configurations hormis celles qui présentent un sommet de type en bas à gauche. Or, fixer ainsi l'orientation des arêtes incidentes à ce sommet a pour effet de fixer l'ensemble de la ligne x_1 et de la colonne x_{N+1} , comme indiqué Figure 2.6. La partie non fixée donne la fonction de partition Z pour la taille $N-1$, les paramètres x_1 et x_{N+1} ayant disparu, et les poids des sommets fixés donnent le facteur $\bar{A}(\dots)$ indiqué.

Pour (2.47), le raisonnement est le même, en plaçant la ligne x_1 en haut de la grille; à nouveau, la ligne x_1 et la colonne x_{N+1} sont fixées dans toutes les configurations de poids non nul. ■

Notons que les spécialisations que nous avons démontrées sont sous la forme $x_1 = a^{\pm 1}x_{N+1}$, mais le Lemme 2.18 permet de remplacer x_{N+1} par n'importe laquelle des variables x_i , $N+1 \leq i \leq 2N$, soit au total $2N$ spécialisations de la variable x_1 ; et, dans le cas $a = e^{i\pi/3}$, le Lemme 2.20 étend le spectre à $x_1 = a^{\pm 1}x_i$, $2 \leq i \leq 2N$, soit, potentiellement, $4N-2$ spécialisations pour la variable x_1 (ou n'importe quelle autre variable).

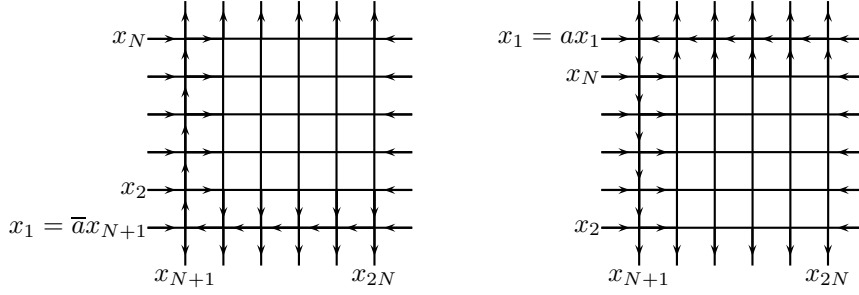


FIG. 2.6 – Arêtes fixées pour (2.46) à gauche et (2.47) à droite

Lemme 2.23 (spécialisations de Z_{HT}). *Posons*

$$\begin{aligned} A_H^1(x_1, \mathbf{x}_{2N} \setminus x_1) &= \prod_{1 \leq k \leq N} \sigma(a^2 x_1 \bar{x}_k) \prod_{N+1 \leq k \leq 2N} \sigma(ax_k \bar{x}_1) \\ \bar{A}_H^1(x_1, \mathbf{x}_{2N} \setminus x_1) &= \prod_{1 \leq k \leq N} \sigma(a^2 x_k \bar{x}_1) \prod_{N+1 \leq k \leq 2N} \sigma(ax_1 \bar{x}_k) \\ A_H^0(x_N, \mathbf{x}_{2N-1} \setminus x_N) &= \prod_{1 \leq k \leq N-1} \sigma(ax_k \bar{x}_N) \prod_{N \leq k \leq 2N-1} \sigma(a^2 x_N \bar{x}_k) \\ \bar{A}_H^0(x_N, \mathbf{x}_{2N-1} \setminus x_N) &= \prod_{1 \leq k \leq N-1} \sigma(ax_N \bar{x}_k) \prod_{N \leq k \leq 2N-1} \sigma(a^2 x_k \bar{x}_N). \end{aligned}$$

Alors, pour $\star = \curvearrowright, \curvearrowleft, \curvearrowright, \curvearrowleft$ et $\square = \curvearrowright, \curvearrowleft, \curvearrowright, \curvearrowleft$ respectivement, et pour les parités de tailles appropriées, on a

$$Z_{\text{HT}}^\star(2N+1; \mathbf{x}_{2N}, x, \mathbf{ax}_1) = A_H^1(x_1, \mathbf{x}_{2N} \setminus x_1) Z_{\text{HT}}^\square(2N; \mathbf{x}_{2N} \setminus x_1, x_1, x) \quad (2.48)$$

$$Z_{\text{HT}}^\square(2N+1; \mathbf{x}_{2N}, x, \bar{a}x_1) = \bar{A}_H^1(x_1, \mathbf{x}_{2N} \setminus x_1) Z_{\text{HT}}^\star(2N; \mathbf{x}_{2N} \setminus x_1, x, x_1) \quad (2.49)$$

$$Z_{\text{HT}}^\star(2N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, ax_N) = \sigma(ax_N \bar{x}_N) A_H^0(x_N, \mathbf{x}_{2N-1} \setminus x_N) Z_{\text{HT}}^\square(2N-1; \mathbf{x}_{2N-1} \setminus x_N, x, x_N) \quad (2.50)$$

$$Z_{\text{HT}}^\square(2N; \mathbf{x}_{2N-1}, \bar{a}x_N, y) = \sigma(ax_N \bar{y}) \bar{A}_H^0(x_N, \mathbf{x}_{2N-1} \setminus x_N) Z_{\text{HT}}^\star(2N-1; \mathbf{x}_{2N-1} \setminus x_N, y, x_N) \quad (2.51)$$

Démonstration. La preuve est similaire à celle du lemme précédent, à ceci près qu'il est nécessaire, avant de recenser des arêtes fixées, de multiplier la fonction de partition par un certain facteur, ce que nous interprétons comme une modification du graphe de glace carrée, et d'appliquer le Lemme 2.16. Il se trouve qu'à chaque fois, les facteurs additionnels sont exactement compensés par les poids des sommets fixés par la spécialisation.

Pour démontrer (2.48), nous multiplions le membre gauche par

$$\prod_{N+1 \leq k \leq 2N} \sigma(a^2 x_k \bar{y}),$$

ce qui revient à ajouter, à la suite de la ligne y , une ligne $\bar{a}y$ qui longe le bord inférieur de la grille; le Lemme 2.16 transforme le graphe de la Figure 2.7(a) en celui de 2.7(b). En posant $y = ax_1$, nous obtenons les arêtes fixées indiquées, ce qui donne une fonction de partition

$$\prod_{N+1 \leq k \leq 2N} \sigma^2(ax_k \bar{x}_1) \prod_{1 \leq k \leq N} \sigma(a^2 x_1 \bar{x}_k) Z_{\text{HT}}(2N; \mathbf{x}_{2N} \setminus x_1, x_1, x).$$

En tenant compte du fait que l'on a $a^2 x_k \bar{y} = ax_k \bar{x}_1$, l'équation se simplifie. Enfin, pour ce qui concerne la restriction sur l'orientation de l'arête charnière, il suffit de constater que fixer initialement l'orientation

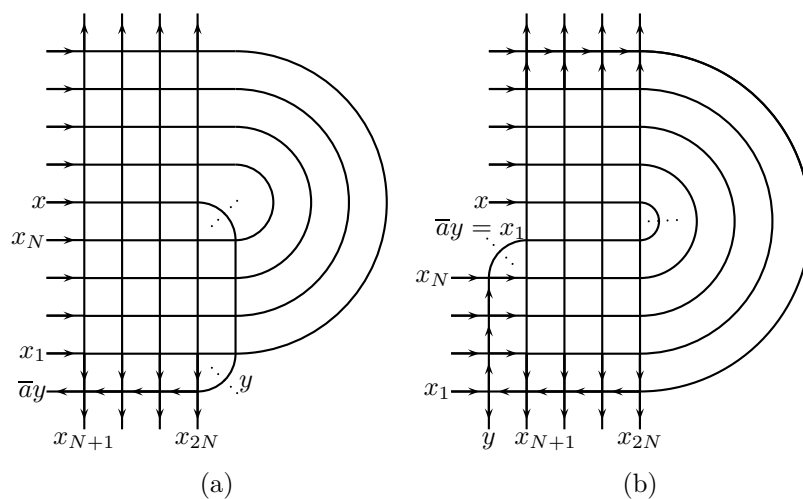


FIG. 2.7 – Preuve de (2.48)

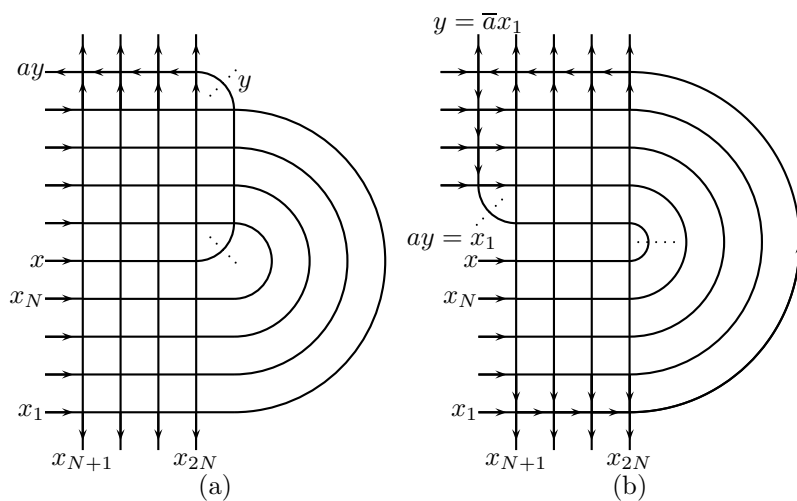


FIG. 2.8 – Preuve de (2.49)

de cette arête comme sortante du croisement x/x_{2N} (série $Z_{HT}^{\overleftarrow{y}}$) donne au résultat une arête fixée de la même manière (série $Z_{HT}^{\overrightarrow{x}}$).

Pour (2.49), le principe est le même. Nous commençons par redessiner le graphe de façon à ce que la ligne y aboutisse sur le bord supérieur, et multiplions par

$$\prod_{N+1 \leq k \leq 2N} \sigma(a^2 y \bar{x}_k),$$

ce qui revient à ajouter une ligne ay le long du bord supérieur (Figure 2.8(a)). De nouveau, le Lemme 2.16 transforme le graphe (Figure 2.8(b)), et poser $y = \bar{a}x_1$ permet de fixer des arêtes et de conclure. Comme précédemment, une arête charnière initialement orientée sortante du croisement x/x_{2N} reste sortante, et la série $Z_{HT}^{\overleftarrow{y}}$ donne $Z_{HT}^{\overrightarrow{x}}$.

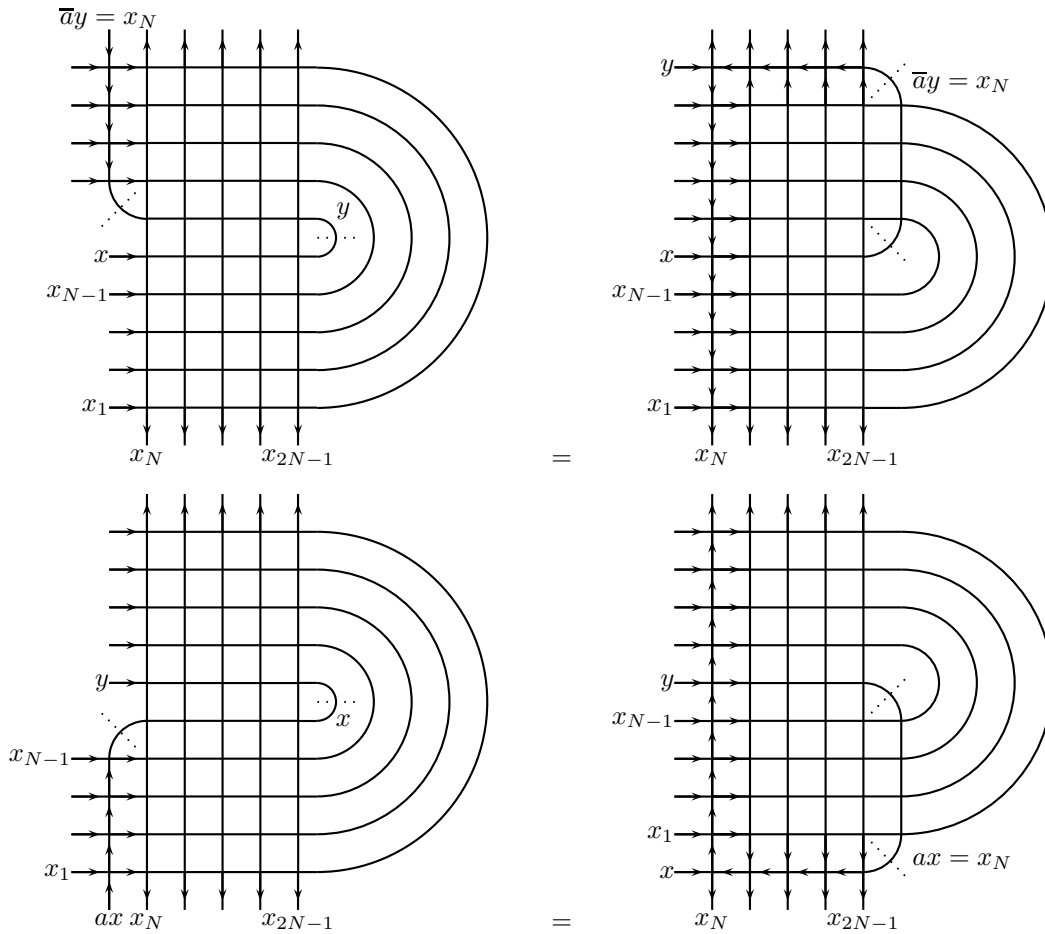


FIG. 2.9 – Preuve de (2.50-2.51)

Le raisonnement suit le même cheminement pour (2.50) et (2.51) ; les modifications et transformations sont indiquées Figure 2.9. ■

Ici aussi, nous avons écrit les spécialisations sous la forme $y = a^{\pm 1}x_1$ ou $y = a^{\pm 1}x_N$ (voir plus loin comment réécrire (2.51) comme une spécialisation de y plutôt que de x). Le Lemme 2.18 permet alors de remplacer (pour la taille $2N$) x_1 par x_i avec $1 \leq i \leq N$, et (pour la taille $2N + 1$) x_N par x_i avec $N \leq i \leq 2N - 1$. Nous obtenons ainsi, dans chaque cas, $2N$ spécialisations de la variable y .

Lemme 2.24 (spécialisations de Z_{QT}). *Posons*

$$\begin{aligned} \bar{A}_Q(x_1, \mathbf{x}_{m-1} \setminus x_1) &= \prod_{1 \leq k \leq m-1} \sigma(a^2 x_k \bar{x}_1) \sigma(ax_1 \bar{x}_k), \\ A_Q(x_1; \mathbf{x}_{m-1} \setminus x_1) &= \prod_{1 \leq k \leq m-1} \sigma(a^2 x_1 \bar{x}_k) \sigma(ax_k \bar{x}_1). \end{aligned}$$

Pour $\star = \overleftarrow{\curvearrowright}, \overleftarrow{\curvearrowleft}, \overleftarrow{\curvearrowright}, \overleftarrow{\curvearrowleft}$ et $\square = \overleftarrow{\curvearrowright}, \overleftarrow{\curvearrowleft}, \overleftarrow{\curvearrowright}, \overleftarrow{\curvearrowleft}$, respectivement, et la parité appropriée de m , on a

$$Z_{QT}^\star(2m; \mathbf{x}_{m-1}, \bar{\mathbf{a}}\mathbf{x}_1, y) = \sigma(ax_1 \bar{y}) \bar{A}_Q(x_1, \mathbf{x}_{m-1}) Z_{QT}^\square(2m-2; \mathbf{x}_{m-1} \setminus x_1, y, x_1) \quad (2.52)$$

$$Z_{QT}^\square(2m; \mathbf{x}_{m-1}, x, \mathbf{a}\mathbf{x}_1) = \sigma(ax \bar{x}_1) A_Q(x_1; \mathbf{x}_{m-1} \setminus x_1) Z_{QT}^\star(2m-2; \mathbf{x}_{m-1} \setminus x_1, x_1, x) \quad (2.53)$$

Démonstration. La preuve est très similaire à la précédente : à chaque fois, il s'agit d'identifier l'ajout à faire au graphe, d'appliquer le Lemme 2.16, d'identifier les arêtes fixées par la spécialisation et de remarquer que l'identité obtenue se simplifie. Les graphes correspondants sont indiqués Figure 2.10; le symbole Δ indique la présence d'un changement d'orientation seulement lorsque m est pair.

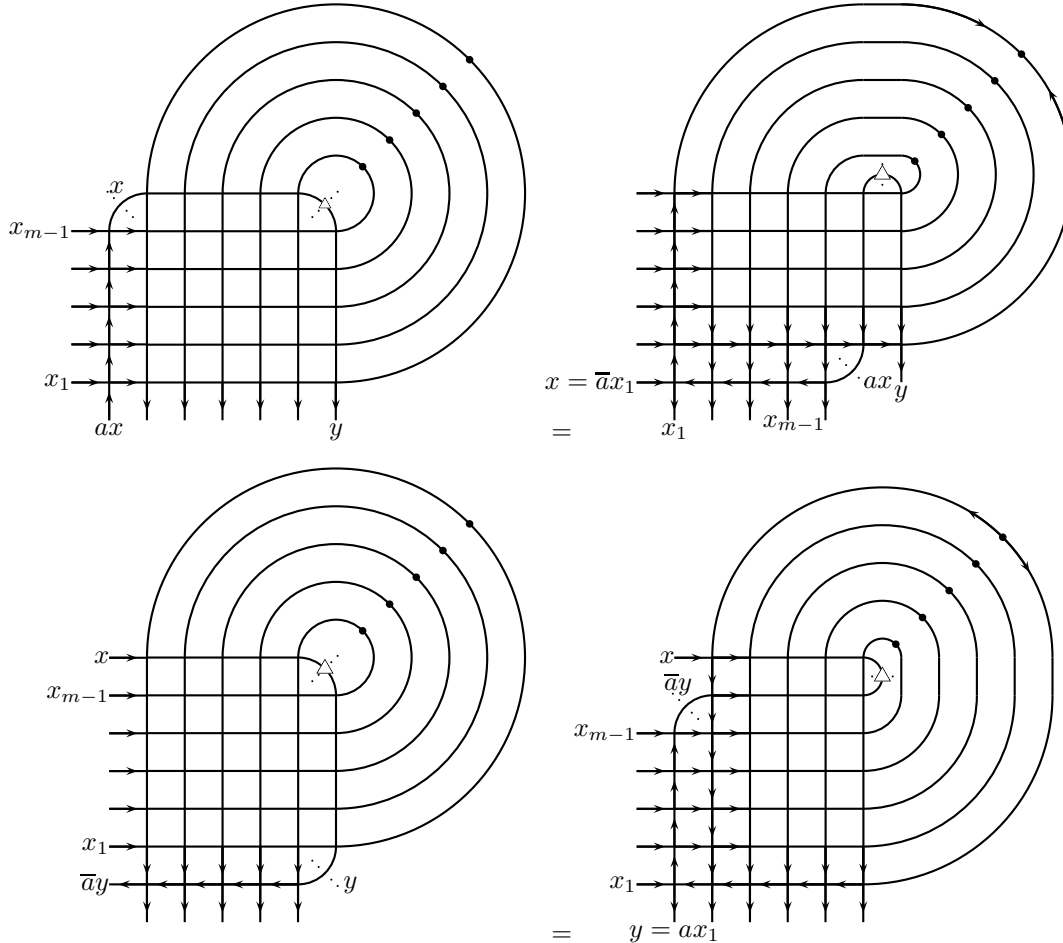


FIG. 2.10 – Preuve de (2.52-2.53)

■

Encore une fois, nous avons écrit les spécialisations sous la forme $x = \bar{a}x_1$ ou $y = ax_1$, et le Lemme 2.18 permet à chaque fois de remplacer x_1 par n'importe laquelle des variables x_i , $1 \leq i \leq m-1$.

2.2.3.3 Preuve du théorème 2.21

Nous avons maintenant la plupart des ingrédients nécessaires à la preuve du Théorème 2.21.

Remarquons tout d'abord que, chaque fois que les lemmes qui précèdent nous donnent une spécialisation de la variable x , celle-ci peut se transformer en spécialisation de la variable y au moyen soit du Lemme 2.19, soit des équations (2.42-2.45).

Ainsi, (2.51) devient

$$\begin{aligned} Z_{\overrightarrow{\text{HT}}}^{\rightarrow}(2N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, \bar{a}x_N) &= S_1(x, \bar{a}x_N)Z_{\overrightarrow{\text{HT}}}^{\rightarrow}(\dots, \bar{a}x_N, x) + S_0(x, \bar{a}x_N)Z_{\overrightarrow{\text{HT}}}^{\rightarrow}(\dots, \bar{a}x_N, x) \\ &= \sigma(ax_N \bar{x})\bar{A}_H^0(x_N; \mathbf{x}_{2N-1} \setminus x_N) \left(S_1(x, \bar{a}x_N)Z_{\overrightarrow{\text{HT}}}^{\leftarrow}(\dots, x, x_N) + S_0(x, \bar{A}x_N)Z_{\overrightarrow{\text{HT}}}^{\leftarrow}(\dots, x, x_N) \right) \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} Z_{\overrightarrow{\text{HT}}}^{\leftarrow}(2N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, \bar{a}x_N) &= S_1(x, \bar{a}x_N)Z_{\overrightarrow{\text{HT}}}^{\leftarrow}(\dots, \bar{a}x_N, x) + S_0(x, \bar{a}x_N)Z_{\overrightarrow{\text{HT}}}^{\leftarrow}(\dots, \bar{a}x_N, x) \\ &= \sigma(ax_N \bar{x})\bar{A}_H^0(x_N; \mathbf{x}_{2N-1} \setminus x_N) \left(S_1(x, \bar{a}x_N)Z_{\overrightarrow{\text{HT}}}^{\leftarrow}(\dots, x, x_N) + S_0(x, \bar{A}x_N)Z_{\overrightarrow{\text{HT}}}^{\leftarrow}(\dots, x, x_N) \right) \end{aligned} \quad (2.55)$$

et (2.52) devient

$$\begin{aligned} Z_{\overrightarrow{\text{QT}}}^{\rightarrow}(4N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, \bar{a}x_1) &= S_1(x, \bar{a}x_1)Z_{\overrightarrow{\text{QT}}}^{\rightarrow}(\dots, \bar{a}x_1, x) + S_0(x, \bar{a}x_1)Z_{\overrightarrow{\text{QT}}}^{\rightarrow}(\dots, \bar{a}x_1, x) \\ &= \sigma(ax_1 \bar{x})\bar{A}_Q(x_1, \mathbf{x}_{2N-1} \setminus x_1) \left(S_1(x, \bar{a}x_1)Z_{\overrightarrow{\text{QT}}}^{\leftarrow}(\dots, x, x_1) + S_0(x, \bar{a}x_1)Z_{\overrightarrow{\text{QT}}}^{\leftarrow}(\dots, x, x_1) \right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} Z_{\overrightarrow{\text{QT}}}^{\leftarrow}(4N; \mathbf{x}_{2N-1}, x, \bar{a}x_1) &= S_1(x, \bar{a}x_1)Z_{\overrightarrow{\text{QT}}}^{\leftarrow}(\dots, \bar{a}x_1, x) + S_0(x, \bar{a}x_1)Z_{\overrightarrow{\text{QT}}}^{\leftarrow}(\dots, \bar{a}x_1, x) \\ &= \sigma(ax_1 \bar{x})\bar{A}_Q(x_1, \mathbf{x}_{2N-1} \setminus x_1) \left(S_1(x, \bar{a}x_1)Z_{\overrightarrow{\text{QT}}}^{\leftarrow}(\dots, x, x_1) + S_0(x, \bar{a}x_1)Z_{\overrightarrow{\text{QT}}}^{\leftarrow}(\dots, x, x_1) \right). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Deuxième élément : lorsque $a = e^{i\pi/3}$, on a $a^2 = -\bar{a}$ et par conséquent,

$$\sigma(a^2 t) = \sigma(-\bar{a}t) = \sigma(a\bar{t}).$$

Ainsi, pour cette valeur de a les produits apparaissant dans les lemmes de spécialisation se réécrivent de

manière plus compacte :

$$\begin{aligned}
A(x_{N+1}, \mathbf{x}_{2N} \setminus \{x_1, x_{N+1}\}) &= \sigma(a) \prod_{k \neq 1, N+1} \sigma(ax_k \bar{x}_{N+1}), \\
\bar{A}(x_{N+1}, \mathbf{x}_{2N} \setminus \{x_1, x_{N+1}\}) &= \sigma(a) \prod_{k \neq 1, N+1} \sigma(ax_{N+1} \bar{x}_k), \\
A_H^1(x_1, \mathbf{x}_{2N} \setminus x_1) &= \prod_{1 \leq k \leq 2N} \sigma(ax_k \bar{x}_1), \\
\bar{A}_H^1(x_1, \mathbf{x}_{2N} \setminus x_1) &= \prod_{1 \leq k \leq 2N} \sigma(ax_1 \bar{x}_k), \\
A_H^0(x_N, \mathbf{x}_{2N-1} \setminus x_N) &= \prod_{1 \leq k \leq 2N-1} \sigma(ax_k \bar{x}_N), \\
\bar{A}_H^0(x_N, \mathbf{x}_{2N-1} \setminus x_N) &= \prod_{1 \leq k \leq 2N-1} \sigma(ax_N \bar{x}_k), \\
\bar{A}_Q(x_1, \mathbf{x}_{m-1} \setminus x_1) &= \prod_{1 \leq k \leq m-1} \sigma^2(ax_1 \bar{x}_k), \\
A_Q(x_1, \mathbf{x}_{m-1} \setminus x_1) &= \prod_{1 \leq k \leq m-1} \sigma^2(ax_k \bar{x}_1).
\end{aligned}$$

On a donc, en combinant,

$$\begin{aligned}
A(x_i, \mathbf{x}_{2N} \setminus x_i, x) A_H^1(x_i, \mathbf{x}_{2N} \setminus x_i) &= \sigma(ax \bar{x}_i) A_Q(x_i, \mathbf{x}_{2N} \setminus x_i) \\
\bar{A}(x_i, \mathbf{x}_{2N} \setminus x_i, x) \bar{A}_H^1(x_i, \mathbf{x}_{2N} \setminus x_i) &= \sigma(ax_i \bar{x}) \bar{A}_Q(x_i, \mathbf{x}_{2N} \setminus x_i),
\end{aligned}$$

ce qui fait que (2.38) et (2.39) impliquent que (2.40) et (2.41) sont vraies (pour la taille $4N + 2$) pour les $2N$ spécialisations $y = a^{\pm 1} x_i$ ($1 \leq i \leq N$). C'est assez pour prouver (2.41) (qui porte sur des polynômes de Laurent de demie-largeur $2N - 1$), mais il en manque une pour prouver (2.40).

Pour (2.38) et (2.39), le même miracle se produit : on a

$$A(x_i, \mathbf{x}_{2N-1} \setminus x_i) \sigma(ax \bar{x}_i) A_H^0(x_i, \mathbf{x}_{2N-1} \setminus x_i) = \sigma(ax \bar{x}_i) A_Q(x_i, \mathbf{x}_{2N-1} \setminus x_i),$$

et donc (2.41) et (2.40) pour la taille $4N - 2$ impliquent que (2.38) et (2.39) sont vraies pour les N spécialisations $y = ax_i$, $N \leq i \leq 2N - 1$. Par ailleurs, on a également

$$\bar{A}(x_i, \mathbf{x}_{2N-1} \setminus x_i) \bar{A}_H^0(x_i, \mathbf{x}_{2N-1} \setminus x_i) = \bar{A}_Q(x_i, \mathbf{x}_{2N-1} \setminus x_i),$$

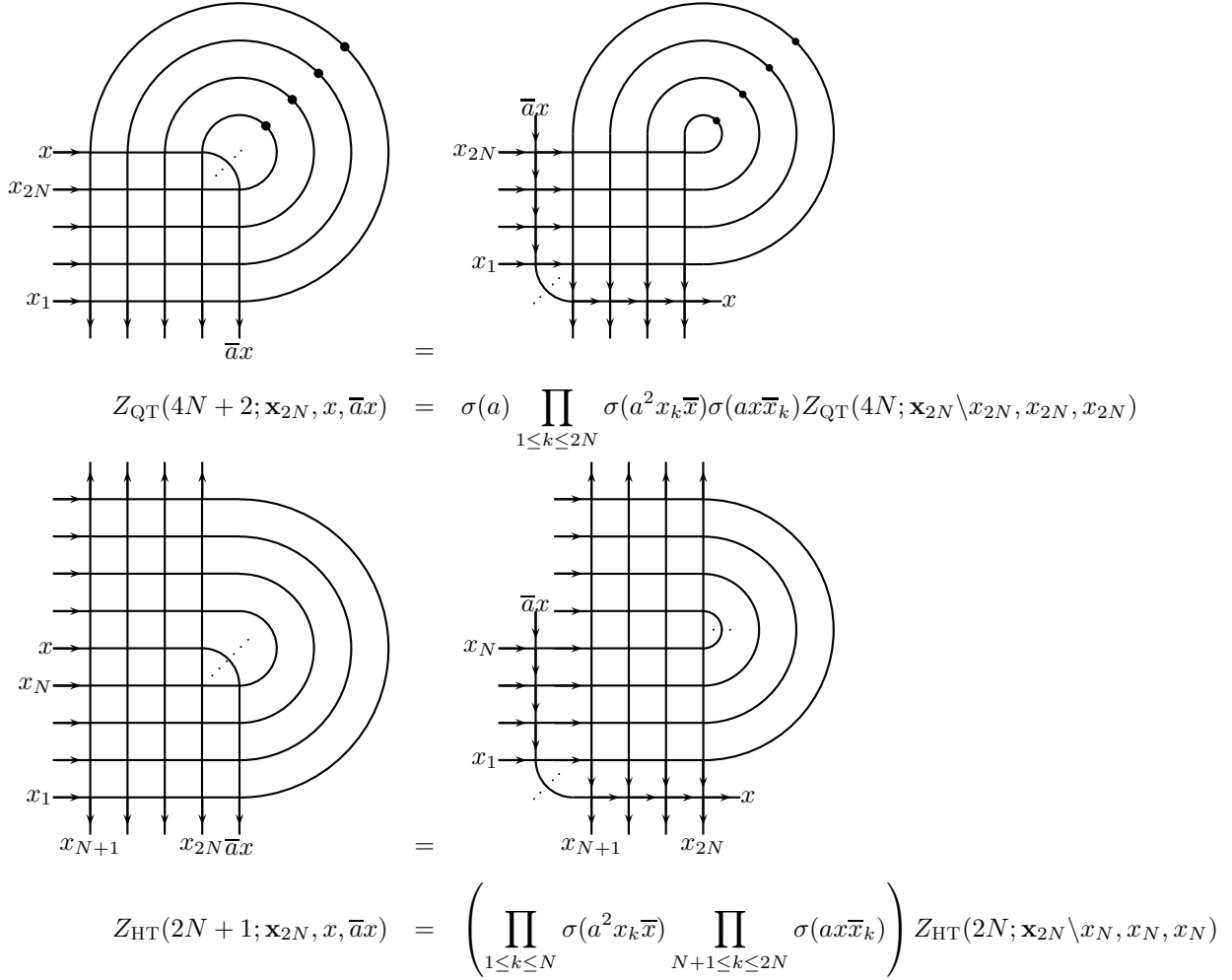
et donc (2.41) et (2.40) pour la taille $4N - 2$ impliquent également que (2.38) et (2.39) sont vraies pour les N spécialisation $y = \bar{a}x_i$, $N \leq i \leq 2N - 1$. Nous avons donc un total de $2N$ spécialisations de y : c'est exactement ce qu'il nous faut pour (2.38) qui porte sur des polynômes de Laurent de demie-largeur $2N - 1$, et une de plus que nécessaire pour (2.39).

À ce point, nous avons *presque* démontré

$$((2.38) \text{ et } (2.39), \text{ taille } 4N) \implies (((2.40) \text{ et } (2.41), \text{ taille } 4N + 2) \implies ((2.38) \text{ et } (2.39), \text{ taille } 4N + 4);$$

presque, car il nous manque, uniquement pour (2.40), une spécialisation de y .

Nous obtenons cette spécialisation manquante, non pas pour les séries $Z_{QT}^{\vec{\uparrow}}$, $Z_{QT}^{\overleftarrow{\uparrow}}$, $Z_{HT}^{\vec{\uparrow}}$ et $Z_{HT}^{\overleftarrow{\uparrow}}$, mais pour les séries d'origine $Z_{QT}(4N+2; \mathbf{x}_{2N}, x, y)$ et $Z_{HT}(4N+1; \mathbf{x}_{2N}, x, y)$: en effet, si l'on pose $y = \bar{a}x$ sans imposer d'orientation à l'arête charnière, nous sommes directement en position d'appliquer le Lemme 2.16.



$$\begin{aligned}
 Z_{\text{QT}}(4N + 2; \mathbf{x}_{2N}, x, \bar{a}x) &= \sigma(a) \prod_{1 \leq k \leq 2N} \sigma(a^2 x_k \bar{x}) \sigma(ax \bar{x}_k) Z_{\text{QT}}(4N; \mathbf{x}_{2N} \setminus x_{2N}, x_{2N}, x_{2N}) \\
 Z_{\text{HT}}(2N + 1; \mathbf{x}_{2N}, x, \bar{a}x) &= \left(\prod_{1 \leq k \leq N} \sigma(a^2 x_k \bar{x}) \prod_{N+1 \leq k \leq 2N} \sigma(ax \bar{x}_k) \right) Z_{\text{HT}}(2N; \mathbf{x}_{2N} \setminus x_N, x_N, x_N)
 \end{aligned}$$

(dans l'équation sur $Z_{\text{QT}}(\dots)$, le facteur $\sigma(a)$ vient du sommet supplémentaire au centre du graphe, qui est toujours valué $\sigma(a)$; l'équation pour $Z_{\text{HT}}(2N + 1; \dots)$ apparaît également dans [67])

Cette dernière spécialisation nous donne un point supplémentaire où (2.37) est vraie, et donc, puisque nous savons déjà que (2.41) est vraie, par différence, (2.40) est également vraie pour $y = \bar{a}x$, ce qui termine la preuve de la récurrence et du théorème.

2.2.3.4 Remarques sur la preuve

À la différence des preuves de factorisation de Kuperberg, notre preuve du théorème, et donc du résultat d'énumération "pure" qui en est la conséquence, ne fait quasiment pas appel au calcul de déterminants; ceux-ci sont cachés dans le Lemme 2.20. L'"astuce" d'attribuer non pas un, mais deux paramètres spectraux distincts à une ligne du graphe, déjà utilisée par Razumov et Stroganov [67] pour l'énumération des HTFPL de taille impaire, semble ici cruciale. En revanche, à la différence des QTASM de taille $4N$, la fonction de partition des qQTASM ne semble pas se factoriser pour d'autres valeurs de a que $e^{\pm i\pi/3}$, ce qui semble interdire d'utiliser la même voie pour démontrer des raffinements tenant compte du nombre de -1 de la matrice.

2.3 Conclusion

Le sujet du comptage non raffiné des ASM, avec ou sans conditions de symétrie, paraît relativement clos : de ce point de vue, une seule des conjectures proposées par Robbins [69] pour l'énumération des classes de symétrie d'ASM reste ouverte. Cette conjecture porte sur les ASM symétriques par rapport aux deux diagonales (DDASM), de taille impaire. Pour les autres classes de symétrie, soit une formule produit a déjà été prouvée, soit les premiers termes de la séquence laissent penser que l'énumération n'aura pas une forme produit qui semble être l'un des signes que les méthodes existantes peuvent fonctionner.

Dans le domaine, il reste un peu de place pour des résultats nouveaux, sous la forme de l'énumération de classes de quasi-symétrie. Il est possible que les qVHASM de taille $4N + 2$, qui correspondent à une variante des UUSASM de Kuperberg et pour lesquelles il est facile de construire un modèle de glace carrée, se prêtent également au même type d'exercice.

Un autre défi serait de donner une version plus bijective des formules d'énumération. Il est quelque peu frustrant, par exemple, de ne pas être capable d'exhiber une bijection un minimum combinatoire entre $\mathcal{A}_{QT}(4N)$ et $\mathcal{A}_{HT}(2N) \times \mathcal{A}(N) \times \mathcal{A}(N)$. D'une certaine manière, le chapitre suivant, qui traite de la distribution des couplages de familles de FPL, amplifie cette frustration en décrivant certaines propriétés qu'une telle bijection devrait avoir pour être pleinement satisfaisante.

Chapitre 3

FPL et couplages plans : conjectures de Razumov-Stroganov

Au début des années 2000, l'intérêt pour les matrices à signes alternants s'est trouvé renforcé par une conjecture, formulée par les physiciens Razumov et Stroganov, et qui fait apparaître les cardinalités des ensembles $\mathcal{A}(N, p)$ dans un problème qui, *a priori*, n'avait rien à voir avec les boucles compactes ou les matrices à signes alternants. Cette première conjecture (qui, dans sa version la plus générale, est encore à démontrer) a été depuis généralisée à divers cas de symétrie, ce qui indique clairement qu'il y a là "quelque chose" à trouver.

Dans ce chapitre, nous décrivons ces différentes conjectures et leurs interprétations, ainsi que des pistes suivies jusqu'ici pour les démontrer. La Section 3.1 présente le contexte et un certain nombre de conjectures "à la Razumov et Stroganov", proposées par différents auteurs; seuls les détails de la présentation, qui se veut aussi uniforme que possible, sont un tant soit peu originaux. Les sections suivantes présentent des résultats et conjectures nouveaux dans la même veine.

3.1 Conjectures de Razumov et Stroganov

3.1.1 Opérateurs de croisement de brins

On définit $2N$ fonctions de l'ensemble des couplages plans à $2N$ brins dans lui-même, e_1, \dots, e_{2N} , de la manière suivante : pour tout couplage $p \in \mathcal{C}_N$, $e_i(p)$ est obtenu à partir de p en éliminant les deux paires $\{i, j\}$ et $\{i+1, k\}$ auxquelles appartiennent i et $i+1$, et en les remplaçant par $\{i, i+1\}$ et $\{j, k\}$; dans le cas où $\{i, i+1\}$ est une des paires de p , $e_i(p) = p$. En termes ensemblistes, en utilisant la notation $p(i)$ pour l'autre élément de la paire contenant i ,

$$e_i(p) = (p - \{\{i, p(i)\}, \{i+1, p(i+1)\}\}) \cup \{\{i, i+1\}, \{p(i), p(i+1)\}\}.$$

Chaque e_i peut être étendu linéairement à l'espace vectoriel V_N dont une base formelle est l'ensemble des couplages plans (espace des combinaisons linéaires de couplages), espace dont la dimension est évidemment le N -ème nombre de Catalan.

L'interprétation géométrique de e_i consiste à "coller" à l'extérieur du disque représentant le couplage p , un anneau avec une boucle en face des sommets i et $i+1$; le couplage $e_i(p)$ est alors "lu" sur le cercle extérieur, en ignorant une éventuelle boucle fermée.

Les opérateurs e_i satisfont des relations qui rappellent celles des tresses :

$$e_i e_j = e_j e_i \text{ si } |i - j| > 1 \tag{3.1}$$

$$e_i^2 = e_i \tag{3.2}$$

$$e_i e_{i\pm 1} e_i = e_i \tag{3.3}$$

Ces relations sont celles qui définissent classiquement l’algèbre de Temperley-Lieb (l’équation (3.2) est normalement paramétrée sous la forme $e_i^2 = \beta e_i$, ce qui revient à pondérer par β l’apparition d’une boucle fermée). Dans le cas qui nous intéresse principalement, les indices sont pris modulo $2N$, et on parle parfois d’algèbre de Temperley-Lieb circulaire.

3.1.2 Conjecture (forte) de Razumov et Stroganov

La conjecture de Razumov et Stroganov, dans sa version parfois appelée “forte”¹, s’exprime de manière très concise en termes des opérateurs e_i sur V_N , et plus précisément de leur moyenne :

Conjecture 3.1 (Razumov et Stroganov [64, 65]). *Soit H l’opérateur linéaire de V_N dans lui-même défini par*

$$H = \frac{1}{2N} \sum_{1 \leq k \leq 2N} e_k.$$

Alors le vecteur

$$\mathbf{v} = \sum_{p \in \mathcal{C}_N} A(N; p) \mathbf{p},$$

où $A(N; p)$ désigne le cardinal de $\mathcal{A}(N; p)$ (autrement dit, le nombre de FPL de taille N ayant p pour couplage), est vecteur propre de H pour la valeur propre 1.

Remarquons qu’il est facile de voir que 1 est nécessairement la plus grande valeur propre de H , et que le sous-espace propre associé est de dimension 1.

On peut donner une interprétation probabiliste de cette conjecture, et c’est d’ailleurs ce que font Razumov et Stroganov : il est équivalent de choisir un FPL aléatoire uniforme de taille N et de conserver son couplage, ou de choisir, indépendamment, un FPL aléatoire uniforme et un opérateur de croisement de brins aléatoire uniforme, et d’appliquer l’opérateur au couplage du FPL.

Ou encore, en utilisant le langage des chaînes de Markov :

Conjecture 3.2. *Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ la chaîne de Markov² de matrice de transition $M = (m_{p,p'})_{p,p' \in \mathcal{C}_N}$ définie par*

$$m_{p,p'} = \frac{1}{2N} \#\{i : 1 \leq i \leq 2N, e_i(p) = p'\};$$

alors la chaîne $(X_n)_{n \geq 0}$ est irréductible et apériodique, et son unique distribution limite est $\pi = (\pi(p))_{p \in \mathcal{C}_N}$, avec

$$\pi(p) = \frac{A(N; p)}{A(N)}.$$

Le fait que la chaîne de Markov soit apériodique est immédiat : chaque fois que $\{i, i+1\}$ est une des paires de p , on a $e_i(p) = p$ (et chaque couplage a au moins deux paires de ce type).

Le fait qu’elle soit irréductible est à peine plus difficile. À partir de n’importe quel couplage, on atteint le couplage $p_0 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2N-1, 2N\}\}$ et appliquant, dans n’importe quel ordre, les N opérateurs d’indices impairs $e_1, e_3, \dots, e_{2N-1}$. Inversement, à partir de p_0 , on peut définir une suite (non commutative cette fois) d’opérateurs qui donne un couplage quelconque ; une façon de faire consiste à ordonner les paires de p par ordre décroissant de longueurs (la longueur d’une paire $\{i, j\}$, avec $i < j$, étant $j-i$; cette version, qui ne tient pas compte de la définition cyclique des couplages, ne donnera pas forcément des séquences de longueur minimale), et à appliquer, pour chaque paire $\{i, j\}$, les opérateurs $e_i, e_{i+3}, \dots, e_{j-1}$. On trouvera plus de détails dans le mémoire de Master de Florent Le Gac [47], où est

¹La version “faible” de la conjecture, qui apparaît déjà dans [6], énonce “seulement” que la somme des coordonnées du vecteur propre, normalisé pour que sa plus petite coordonnée soit 1, vaut $A(N)$. Cette formule sommatoire a été prouvée par Di Francesco et Zinn-Justin [28].

²Par défaut, nous ne définissons pas la distribution de l’état initial X_0 de nos chaînes de Markov.

également abordée la question de la recherche d'une suite d'opérateurs de longueur minimale permettant de passer d'un couplage p à un couplage p' .

La Conjecture 3.1 a été raffinée par Di Francesco [24, 25], qui se penche sur l'énumération raffinée des FPL selon le couplage plan et les positions des coefficients non nuls en première et dernière ligne de la matrice à signes alternants. L'invariance par rotation qui fait l'objet du paragraphe suivant est toutefois perdue lorsque l'on fixe la position du 1 en première ligne de l'ASM ; Di Francesco donne alors une interprétation de la distribution du couple de paramètres formé par la position du coefficient non nul en première ligne et le couplage plan à rotation près.

3.1.3 Invariance par rotation : la gyration de Wieland

La Conjecture 3.1, outre qu'elle semble impliquer une relation plus profonde que prévu entre FPL et couplages, soulève une interrogation naturelle : de par sa définition, la distribution limite de la chaîne sur les couplages est manifestement invariante par rotation, alors qu'une telle invariance sur les FPL n'a rien d'évident. Il se trouve pourtant que cette invariance a été démontrée, et de manière bijective, par Wieland [75], avant même que Razumov et Stroganov n'énoncent leur conjecture. La construction que Wieland nomme *gyration* a la propriété surprenante de transformer bijectivement un FPL en un autre, en faisant tourner le couplage dans le sens trigonométrique, et le couplage du FPL complémentaire dans le sens inverse.

Théorème 3.3 (Wieland). *Pour tout N et tous $p, p' \in \mathcal{C}_N$, on a*

$$A(N, p, p') = A(N, R(p), R(p')).$$

Démonstration. Considérons l'opération d'*inversion d'une case* d'un FPL, définie comme suit : si, parmi les arêtes de la case, exactement deux arêtes parallèles appartiennent au FPL, les remplacer par les deux autres arêtes ; sinon, ne rien faire. Autrement dit, le statut (dans ou hors du FPL) des arêtes de la case considérées est inversé, à condition que le résultat soit un FPL. Manifestement, l'inversion d'une case est une involution, et les inversions de cases non voisines deux à deux commutent.

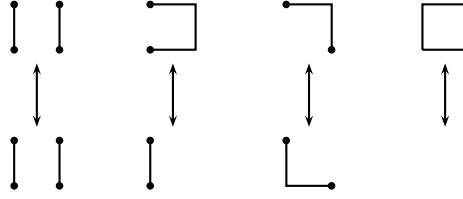
La gyration W de Wieland est définie comme l'inversion simultanée de toutes les cases impaires, suivie de l'inversion simultanée de toutes les cases paires. Formellement, si $I_{i,j}$ est l'inversion de la case (i, j) ,

$$\begin{aligned} H_0 &= \prod_{2|i+j} I_{i,j} \\ H_1 &= \prod_{2 \nmid i+j} I_{i,j} \\ W &= H_0 \circ H_1. \end{aligned}$$

Comme composée d'involutions de $\mathcal{A}(N)$ dans lui-même, W est une bijection ; il reste à montrer que W envoie bien $\mathcal{A}(N, p, p')$ dans $\mathcal{A}(N, R(p), R(p'))$.

Cette propriété est plus facile à démontrer si l'on passe, comme intermédiaire, par les anti-FPL. Notons C l'involution de passage au complémentaire (d'un FPL à un anti-FPL, ou d'un anti-FPL à un FPL) ; C commute avec les $I_{i,j}$ (définis de la même manière sur les anti-FPL que sur les FPL), et l'on a donc $W = (H_1 \circ C) \circ (H_0 \circ C)$.

L'effet de $H_k \circ C$ sur le bord d'une case du FPL est indiqué Figure 3.1. La remarque fondamentale est que, *localement*, une telle transformation conserve le couplage : si un chemin du FPL (ou anti-FPL) f "entre" sur le bord de la case par un sommet A et en "sort" par un sommet B (*i.e.*, les sommets A et B ont une seule de leurs arêtes incidentes sur le bord de la case, et sont reliés entre eux le long de ce bord), alors il en est de même dans $(H_k \circ C)(f)$. La situation est légèrement différente sur les bords de la grille : $H_1 \circ C$ transforme ainsi un chemin d'extrémités A_i et A_j en un anti-chemin d'extrémités B_{2N+1-i} et B_{2N+1-j} (soit une rotation d'un "demi-cran" dans le sens trigonométrique), et un anti-chemin d'extrémités B_i et B_j

FIG. 3.1 – Effet local de $H_k \circ C$

en chemin d'extrémités A_{2N+1-i} et A_{2N+1-j} (soit une rotation d'un "demi-cran" dans le sens horaire) ; et, inversement, $H_0 \circ C$ transforme un anti-chemin d'extrémités B_i et B_j en un chemin d'extrémités A_{2N+2-i} et A_{2N+2-j} (soit une rotation d'un demi-cran dans le sens trigonométrique) et un chemin d'extrémités A_i et A_j en un anti-chemin d'extrémités B_{2N+2-i} et B_{2N+2-j} (soit une rotation d'un demi-cran dans le sens horaire). Au total, W transporte les chemins d'un cran dans le sens trigonométrique, et les anti-chemins dans le sens horaires. On a donc bien $W(f) \in \mathcal{A}(N, R(p), R(p'))$ si $f \in \mathcal{A}(N; p, p')$. ■

La gyration de Wieland a d'autres propriétés remarquables. Elle ne conserve pas le nombre de boucles fermées d'un FPL, car une boucle réduite au bord d'une case peut disparaître sous l'effet d'une des transformations $H_k \circ C$; en revanche, elle conserve le nombre total de boucles fermées du FPL et de son complémentaire.

De plus, W commute avec la symétrie centrale et, dans le cas où N est pair, avec la rotation d'un quart de tour de la grille (qui conservent toutes deux la parité des cases), et donc envoie un FPL invariant par demi-tour sur un FPL invariant par demi-tour, et un FPL de taille paire invariant par quart de tour sur un FPL invariant par quart de tour. En particulier, la propriété d'invariance par rotation de la distribution des couplages est également vraie pour les FPL invariants par symétrie centrale ou par rotation d'un quart de tour.

3.1.4 Interprétation probabiliste et combinatoire de la conjecture de Razumov et Stroganov

L'interprétation probabiliste, à base de chaînes de Markov, de la Conjecture 3.1, est claire : si elle est vraie, il devrait être possible de construire une chaîne $(Y_n)_{n \geq 0}$ d'espace d'états $\mathcal{A}(N)$, pour laquelle la distribution uniforme soit stationnaire, et qui se projette par l'application couplage C en la chaîne sur les couplages. C'est même une équivalence : une telle construction constituerait une preuve de la conjecture.

De manière plus combinatoire, tout se passe comme si les opérateurs e_i qui se définissent naturellement sur les couplages, n'étaient que la projection à travers C d'opérateurs E_i , agissant sur les FPL, et qui auraient les propriétés suivantes :

- $C(E_i(f)) = e_i(C(f))$ pour tous i et f (la dynamique sur les FPL se projette bien en la dynamique des opérateurs de croisement de brins sur les couplages) ;
- stationarité de la distribution uniforme sur les FPL :

$$\sum_{1 \leq i \leq 2N} \sum_{f \in \mathcal{A}(N)} E_i(\mathbf{f}) = 2N \sum_{f \in \mathcal{A}(N)} \mathbf{f}.$$

3.1.5 Comptages de FPL ayant un couplage donné

Pour certains couplages particuliers, le nombre de FPL ayant ce couplage peut avoir une expression simple, conjecturée ou démontrée. Sans prétendre à l'exhaustivité, voici une série d'exemples.

Le couplage “tout parallèle” Le couplage le plus rare³ est le couplage $a^N b^N$, qui n’est représenté que par un unique FPL. La preuve de cette affirmation est élémentaire en utilisant la technique des “arêtes fixes” de de Gier [23]. Bien entendu, par rotations, il existe N variantes de ce couplage.

Le couplage le plus fréquent Le coefficient maximal du vecteur propre de la Conjecture 3.1 est conjecturé par Razumov et Stroganov correspondre au couplage $\pi_N = (ab)^N$ (chaque brin est relié à l’un de ses deux voisins directs), et être égal à $A(N - 1)$. Autrement dit, il doit exister une bijection entre $\mathcal{A}(N; \pi_N)$ et $\mathcal{A}(N - 1)$. Mes propres tentatives de construire une telle bijection au moyen du processus de “glissement de dominos” (*domino shuffling* [35, 36, 62]) ont abouti à une construction qui n’est ni injective, ni (heureusement!) surjective. Comme généralisation, Zuber [78] conjecture que le nombre de FPL de taille N , de couplage $a^k b^k (ab)^{N-k}$, est toujours égal au nombre total de FPL de taille $N - 1$, de couplage $a^{k-1} b^{k-1} \pi$, où π parcourt tous les couplages de taille $N - k$.

Couplages “presque tout parallèle” Di Francesco, Zinn-Justin et Zuber [26] prouvent une formule d’énumération initialement conjecturée par Zuber [78], lorsque le couplage ne comprend que 3 arches “courtes” (donc de la forme $a^k b^k a^\ell b^\ell a^{N-k-\ell} b^{N-k-\ell}$), en se ramenant à une énumération de partitions planes. Caselli et Krattenthaler [14] prouvent les formules, également conjecturées par Zuber, pour des couplages de la forme $a^k b^k a^\ell b^\ell a^{N-k-\ell-2} ababb^{N-k-\ell-2}$ ou $a^k b^k a^\ell b^\ell a^{N-k-\ell-3} aabbabb^{N-k-\ell-3}$. Caselli *et al.* [15] prouvent que, pour deux mots de Dyck quelconques π et π' , les nombres de FPL de couplages respectifs $\pi a^N b^N$ et $\pi a^N \pi' b^N$ s’expriment comme des polynômes en N (dans le second cas, le théorème n’est prouvé que pour N assez grand). Thapper [73] raffine encore les résultats de Caselli *et al.* et obtient des formules sommatoires faisant intervenir des comptages de tableaux de Young et les coefficients de Littlewood-Richardson. Dans tous ces cas, le fait que, au moins pour certains placements du couplage, celui-ci force un grand nombre d’arêtes du FPL, est essentiel.

3.1.6 Autres conjectures à la Razumov-Stroganov

Il existe d’autres classes de FPL pour lesquels la distribution des couplage a une interprétation (conjecturale) en termes d’opérateurs du type de nos opérateurs de croisement de brins e_i : celles des FPL invariants par symétrie centrale, ou HTFPL (*half-turn symmetric fully-packed loops*), des FPL verticalement symétriques (VFPL), et des FPL verticalement et horizontalement symétriques (VHFPL).

Il n’est pas toujours évident d’attribuer correctement chacune des conjectures qui suivent à ses premiers découvreurs ; dans certains articles, elles sont formulées d’une manière “faible”, ne portant pas explicitement sur l’ensemble de la distribution de couplages mais seulement sur la normalisation à appliquer pour obtenir des coefficients entiers (et sur un ou plusieurs coefficients, souvent le minimum et le maximum, du vecteur propre) ; dans d’autres, elles sont formulées sous forme “forte” exprimant l’ensemble du vecteur propre.

3.1.6.1 Le cas des HTFPL : couplages cylindriques

Comme on l’a vu, les couplages des HTFPL peuvent être décrits comme des ensembles de couples plutôt que de paires, avec une condition de non croisement adaptée. Sous cette forme, on peut également définir une version adaptée des opérateurs e_i :

Définition 3.1. Pour un entier $m > 0$ quelconque, soit e'_i l’opérateur de \mathcal{C}'_m dans lui-même, défini comme suit :

- si p contient le couple $(i, i + 1)$, $e'_i(p) = p$;
- si p contient le couple $(i + 1, i)$,

$$e'_i(p) = p - \{(i + 1, i)\} \cup \{(i, i + 1)\};$$

³C’est le plus rare si l’on prouve qu’il existe au moins un FPL pour chaque couplage, ce qu’apparemment personne n’a pris la peine de démontrer proprement ; nous verrons au Chapitre 4 un algorithme de construction qui permet de l’affirmer.

– si p contient les couples (j, i) et $(i + 1, k)$,

$$e'_i(p) = p - \{(j, i), (i + 1, k)\} \cup \{(i, i + 1), (j, k)\};$$

– si p contient les couples (j, i) et $(k, i + 1)$,

$$e'_i(p) = p - \{(j, i), (k, i + 1)\} \cup \{(i, i + 1), (k, j)\};$$

– si p contient les couples (i, j) et $(i + 1, k)$,

$$e'_i(p) = p - \{(i, j), (i + 1, k)\} \cup \{(i, i + 1), (k, j)\}.$$

En d'autres termes, $e'_i(p)$ est obtenu en remplaçant le(s) couple(s) contenant les entiers i et $i + 1$ par le couple $(i, i + 1)$ et ce qu'il faut d'autre pour satisfaire la condition de non croisement.

Comme pour les e_i , les opérateurs e'_i sont naturellement étendus à l'espace des combinaisons linéaires formelles des éléments de \mathcal{C}'_m .

Notons que, si l'on utilise $\mathcal{C}_{m,2}$ pour décrire les couplages des HTFPL, e'_i correspond en fait à $e_i \circ e_{i+2N}$, au sens où, si Φ est la bijection de \mathcal{C}'_m vers $\mathcal{C}_{m,2}$ qui a été esquissée au chapitre 1, on a

$$e'_i = \Phi^{-1} \circ e_i \circ e'_{i+m} \circ \Phi.$$

Une fois cette définition posée, Mitra *et al.* [54, 23] proposent la conjecture suivante, qui est extrêmement similaire à la Conjecture 3.1 :

Conjecture 3.4. Soit H' l'opérateur défini par

$$H' = \frac{1}{m} \sum_{1 \leq k \leq m} e'_k.$$

Alors le vecteur

$$\mathbf{v}' = \sum_{p \in \mathcal{C}'_m} A_{\text{HT}}(m; p) \mathbf{p}$$

est vecteur propre de H' pour la valeur propre 1.

Toutes les interprétations combinato-probabilistes que nous avons données de la conjecture de Razumov et Stroganov s'appliquent, *mutatis mutandis*, à cette conjecture. En particulier, si les hypothétiques opérateurs E_i évoqués plus haut avaient, en plus des propriétés déjà demandées, celle que $E_i \circ E_{i+m}$ envoie $\mathcal{A}_{\text{HT}}(m)$ sur lui-même, nous aurions également une preuve de la Conjecture 3.4.

3.1.6.2 Le cas des VFPL : conditions de bord "fermées"

Les FPL verticalement symétriques (VFPL) ont nécessairement une taille impaire $2N + 1$. La colonne centrale de la matrice à signes alternants sera alors entièrement composée de 1 et de -1 en alternance, ce qui se traduit, soit sur le FPL (pour N impair) soit sur le FPL complémentaire (pour N pair), par une ligne verticale sur la colonne N .

Afin de rendre l'ensemble cohérent, redéfinissons le couplage d'un VFPL comme celui du FPL complémentaire lorsque N est pair ; de plus, les sommets extrémités des chemins sont renumérotés du milieu du bord gauche : $A_1 = (0, N - 1)$, $A_2 = (0, N - 3)$. . .

Avec ces nouvelles conventions, la conjecture énoncée dans [23, 66] (et préfigurée dans [54]) peut être reformulée ainsi :

Conjecture 3.5. *Pour $N \geq 1$, soit \mathcal{C}_{2N+1}^C l'ensemble des couplages plans de $4N + 2$ brins, invariants par réflexion au sens suivant : pour chaque paire $\{i, j\}$ du couplage, celui-ci contient également la paire $\{4N+2-i, 4N+2-j\}$; notons que ceci implique la présence de la paire $\{2N+1, 4N+2\}$. Soit également H^C l'opérateur de $\mathbf{V}(\mathcal{C}_{2N+1}^C)$ dans lui-même, défini par*

$$H^C = \frac{1}{2N-1} \sum_{1 \leq i \leq 2N-1} e_i \circ e_{4N+1-i}. \quad (3.4)$$

Alors le vecteur

$$\mathbf{v} = \sum_{p \in \mathcal{C}_{2N+1}^C} A_V(2N+1; p) \mathbf{p} \quad (3.5)$$

est (à renormalisation près) l'unique vecteur propre de valeur propre 1 de H^C .

Notons que les couplages de \mathcal{C}_{2N+1}^C sont encore plus naturellement codés par les mots de Dyck de longueur $2N$ que ceux de \mathcal{C}_N : parmi les $2N$ brins numérotés de 1 à $2N$, il suffit de coder a ceux qui sont appariés à un brin d'indice supérieur, et b ceux qui sont appariés à un brin d'indice inférieur ; la présence de la paire $\{2N+1, 4N+2\}$ servant de "barrière", le choix arbitraire du point de départ a disparu.

Notons également que, redéfini sur $\mathbf{V}(\mathcal{C}_N)$, l'opérateur H^C ne diffère de l'opérateur H que par la disparition de l'opérateur e_{2N} qui assurait le caractère cycliquement invariant. Par rapport aux couplages plans de \mathcal{C}_N qui sont naturellement dessinés dans un disque, les couplages de \mathcal{C}_{2N+1}^C et la dynamique définie par H^C "vivent" plutôt dans une bande bordée par les brins $4N+2$ (ou 0) et $2N+1$, d'où le nom de conditions de bord "fermées".

3.1.6.3 Le cas des VHFPL : conditions de bord "mixtes"

Considérons maintenant les FPL verticalement *et* horizontalement symétriques (VHFPL) de taille $2N+1$, en conservant les conventions précédemment décrites pour les VFPL. Avec cette convention, leurs couplages, en plus de la condition de réflexion déjà décrite, doivent aussi satisfaire la suivante : pour chaque paire $\{i, j\}$, la paire $\{2N+1-j, 2N+1-i\}$ doit également être présente, et la paire $\{N, N+1\}$ est également fixée. La Figure 3.2 montre (pour $N=6$) les arêtes fixées partagées par tous les VHFPL de taille $2N+1$, et le "quart de grille" sur lequel les FPL sont en bijection avec les VHFPL de taille $2N+1$.

Dans le quart de grille, seuls les chemins incidents aux sommets A'_i influent sur le couplage : les chemins joignant A'_i à A'_j se traduisent par une paire $\{i, j\}$, et les chemins joignant A'_i à B'_j , par une paire $\{i, 2N+1-i\}$. Les couplages définis sur les brins 1 à N correspondent à des "conditions de bord semi-ouvertes" (*mixed boundary conditions*), le brin N remplaçant de manière indifférenciée les sommets B'_1 à B'_{N-1} .

Notons \mathcal{C}_{2N+1}^M l'ensemble des couplages plans sur $4N+2$ brins correspondant à ces VHFPL.

La conjecture de Mitra *et al.*, reformulée de manière à être exprimée en termes des opérateurs e_i sur les couplages de l'ensemble des brins, est la suivante :

Conjecture 3.6. *Soit f_i l'opérateur de $\mathbf{V}(\mathcal{C}_{2N+1}^M)$ dans lui-même, défini par*

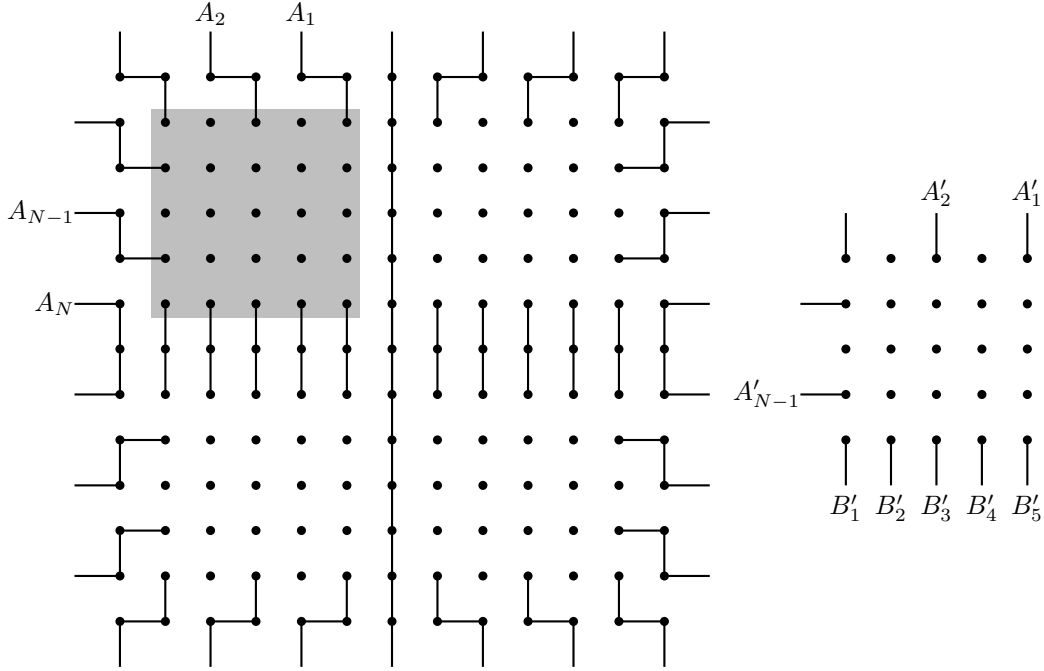
$$f_i = e_N \circ e_{3N+1} \circ e_i \circ e_{2N-i} \circ e_{2N+1+i} \circ e_{4N+1-i} \quad (3.6)$$

pour $1 \leq i \leq N-1$, et

$$H^M = \frac{1}{N-1} \sum_{1 \leq i \leq N-1} f_i. \quad (3.7)$$

Alors le vecteur propre de H^M pour la valeur propre 0, est

$$\mathbf{v} = \sum_{p \in \mathcal{C}_{2N+1}^M} A_{VH}(2N+1, p) \mathbf{p}. \quad (3.8)$$

FIG. 3.2 – Arêtes fixées et domaine fondamental de $\mathcal{A}_{\text{VH}}(2N + 1)$

Remarque sur les opérateurs f_i : les 4 opérateurs e_i , e_{2N-1} , e_{2N+1-i} et e_{4N+1-i} assurent que les mêmes transformations sont effectuées sur les quatre quarts de couplage; e_N et e_{3N+1} ne sont là que pour assurer que les couplages images contiennent toujours les paires $\{N, N + 1\}$ et $\{3N + 1, 3N + 2\}$, et ne sont en fait utiles que pour le cas $i = N - 1$.

3.2 Couplages des QTFPL et qQTFPL

Dans cette section, nous présentons de nouvelles conjectures, assez similaires à celles déjà formulées, et portant sur la distribution des couplages de (q)QTFPL de taille paire. Cette distribution semble être exactement la même que celle des HTFPL de taille deux fois moindre, ce qui peut expliquer que cette classe de symétrie ait échappé à la vigilance des autres auteurs, plus focalisés sur la distribution des couplages que sur le modèle qu'en constituent les FPL.

3.2.1 Le cas des QTFPL

Au vu des Conjectures 3.1, 3.4, 3.5 et 3.6, il est naturel de se demander s'il existe d'autres familles de FPL pour lesquelles il serait possible de donner une interprétation simple de la distribution des couplages. La première qui vient à l'esprit est celle des FPL invariants par une rotation d'un quart de tour, ou QTFPL (de taille forcément multiple de 4).

Pour peu que l'on croie un peu aux conjectures précédentes, et à l'existence d'un lien fort entre les FPL et les couplages, la propriété candidate saute aux yeux : puisque la distribution des couplages de FPL est apparemment invariante par les opérateurs aléatoires de croisement de brins, et qu'il en est de même pour celle des couplages de HTFPL pour peu que les opérateurs de croisement de brins soient "symétrisés" de manière à maintenir l'invariance par la symétrie, on peut sauter le pas et s'attendre à ce que la distribution des couplages des QTFPL (de taille $4N$) soit invariante par des opérateurs encore plus symétrisés : $e_i \circ e_{i+2N} \circ e_{i+4N} \circ e_{i+6N}$.

Intuition confirmée par un programme énumérant tous les QTFPL jusqu'aux 114640611228 QTFPL de taille 20 :

Conjecture 3.7. *Pour $N > 0$, soient e''_i , $1 \leq i \leq 2N$, les opérateurs de $\mathbf{V}(\mathcal{C}_{4N,4})$ dans lui-même définis linéairement par*

$$e''_i = e_i \circ e_{i+2N} \circ e_{i+4N} \circ e_{i+6N},$$

et

$$H'' = \frac{1}{2N} \sum_{1 \leq k \leq 2N} e''_k.$$

Alors le vecteur

$$\mathbf{v} = \sum_{p \in \mathcal{C}_{4N,4}} A_{\text{QT}}(4N; p) \mathbf{p}$$

est vecteur propre de H'' pour la valeur propre 1.

En fait, ce n'est pas sous cette forme que la conjecture a été vérifiée par énumération exhaustive. En effet, les opérateurs e''_i , traduits sur les mots de Dyck bilatères qui codent les couplages invariants par demi tour, sont *exactement* les mêmes que les opérateurs e'_i . Compte tenu de la relation de comptage entre HTFPL de taille $2N$ et QTFPL de taille $4N$, la Conjecture 3.7 devient (sous réserve que la Conjecture 3.4 soit vraie) équivalente à une formulation purement énumérative :

Conjecture 3.8. *Les distributions des couplages des QTFPL de taille $4N$ et des HTFPL de taille $2N$, vus comme mots de Dyck bilatères de longueur $2N$, sont identiques; autrement dit, pour tout mot de Dyck bilatère w de longueur $2N$, on a*

$$A_{\text{QT}}(4N; w) = A_{\text{HT}}(2N; w)A(N)^2. \quad (3.9)$$

3.2.2 Le cas des qQTFPL

Le nombre de qQTFPL de taille $4N + 2$ est encore un multiple du nombre de HTFPL de taille $2N + 1$, et il est donc légitime de se demander s'il existe encore un lien entre les couplages des deux classes. Il existe toutefois une légère difficulté : les qQTFPL n'étant pas parfaitement invariants par rotation, leurs couplages, au sens strict, n'ont pas une symétrie d'ordre 4, mais d'ordre 2 seulement. Toutefois, au prix d'une redéfinition légère de ces couplages, on peut associer un couplage du type $\mathcal{C}_{2N+1,2}$ aux qQTFPL.

Considérons, dans un qQTFPL, les 4 points A, B, C et D qui forment les coins du carré central de la grille G_{4N+2} , avec comme coordonnées respectives $(2N + 1, 2N + 1)$, $(2N + 1, 2N + 2)$, $(2N + 2, 2N + 1)$ et $(2N + 2, 2N + 2)$. La rotation d'un quart de tour doit envoyer le chemin issu de A sur celui issu de B , ce qui implique que le chemin auquel appartiennent ces deux points ne peut pas être une boucle fermée du qQTFPL, mais plutôt être l'un des deux chemins joignant des points de la forme A_i et A_{i+2N+1} (l'autre est celui qui passe par C et D , et joint A_{i+4N+2} et A_{i+6N+3}).

Nous pouvons coder le couplage de notre qQTFPL par un mot de la forme ucv , où vu est un mot de Dyck, de la manière suivante, en examinant les chemins issus des $2N + 1$ sommets A_1 à A_{2N+1} :

- si le chemin issu de A_i passe par A, B, C ou D , alors la i -ème lettre est c ;
- sinon, si A_i est relié à A_j , avec $i < j < 4N + 2$, alors la i -ème lettre est un a ;
- sinon (*i.e.* A_i est relié à A_j avec $j < i$ ou $j > 4N + 2$), la i -ème lettre est un b .

Essentiellement, on considère que les deux chemins qui bordent la case au centre de la grille sont indifférenciés, et codés par la lettre c ; on obtient alors un mot de longueur $8N + 4$ qui est la puissance d'un mot que nous retenons comme codage du couplage.

Avec cette convention, les couplages des qQTFPL de taille $4N + 2$ sont codés par les mêmes mots que ceux des HTFPL de taille $2N + 1$, et l'on peut énoncer la conjecture à laquelle on pense :

Conjecture 3.9. *Pour tout $N > 0$ et tout couplage $p \in \mathcal{C}'_{2N+1}$, on a*

$$A_{\text{QT}}(4N + 2; p) = A_{\text{HT}}(2N + 1; p)A(N)A(N + 1). \quad (3.10)$$

Comme la précédente, cette conjecture a été testée jusqu’à la limite raisonnable des possibilités d’énumération exhaustive, soit la taille 18.

3.2.3 Une preuve très partielle : le cas des couplages les plus rares

Il existe un cas particulier dans lequel une preuve partielles des Conjectures 3.7 et 3.9 (sous la forme de (3.9) et de (3.10)) est connue : c’est celui du couplage le plus rare. Que ce soit pour une taille paire ou impaire, les couplages qui apparaissent le moins souvent dans les HTFPL sont ceux de la forme “tout parallèle” : $a^N b^N$ et ses conjugués pour taille paire $2N$, $ca^N b^N$ et ses conjugués pour taille impaire $2N + 1$. Dans les deux cas, il existe un unique HTFPL ayant ce couplage (et même, un unique FPL, qui se trouve être invariant par demi-tour, ayant le couplage correspondant).

Le résultat est alors le suivant :

Théorème 3.10. *Pour $N > 0$, on a*

$$A_{\text{QT}}(4N; a^N b^N) = A(N)^2 \quad (3.11)$$

$$A_{\text{QT}}(4N - 2; ca^N b^N) = A(N)A(N - 1). \quad (3.12)$$

Démonstration. Dans les deux cas, on utilise la gyration de Wieland pour “placer” le couplage dans une position favorable. La technique des “arêtes fixées”, due à de Gier [23], permet, dans certains cas, de recenser un grand nombre d’arêtes partagées par tous les FPL ayant un couplage donné. Dans notre cas, une fois identifiées ces arêtes fixées, la partie “variable” des FPL permet de les mettre en bijection avec les couplages parfaits de certains graphes. De manière générale, les couplages parfaits d’un graphe planaire sont comptés par un déterminant [45]; ici, le théorème de factorisation de Ciucu [16] permet de conclure.

Plus précisément, le “bon” choix est de placer le couplage de manière à ce que tous les chemins aboutissant sur une extrémité le long d’un même côté de la grille soient contraints à se terminer sur un autre côté (ce qui correspond au couplage $b^N a^N$ dans le cas des QTFPL, et $b^N ca^N$ dans le cas des qQTFPL). La Figure 3.3 montre ces arêtes fixées : il s’agit de chaque arête horizontale de la forme $((i, j), (i, j + 1))$ avec $i + j$ impair, dans un triangle ABC , ainsi que leurs orbites sous l’action de la rotation d’un quart de tour; les sommets A , B et C ont pour coordonnées respectives $(1, 1)$, $(m - 1, 1)$ et $(m/2, m/2)$, où m est la taille du FPL ($4N$ pour les QTFPL, $4N + 2$ pour les qQTFPL). Il convient d’ajouter l’arête $((1, 1), (2, 1))$ qui est imposée par la condition d’invariance par rotation (l’arête alternative $((1, 1), (1, 2))$ impliquerait que la matrice à signes alternants ait un 1 dans chaque coin, ce qui est impossible), et, dans le cas des QTFPL, l’arête $((2N - 1, 2N), (2N, 2N))$ (le sommet C doit avoir degré 2, et les quatre arêtes de la case centrale ne peuvent apparaître dans le FPL).

Les graphes des arêtes *non fixées* (celles qui ne sont pas fixées, et dont aucun des deux sommets incident n’a deux arêtes incidentes fixées) ceux montrés Figure 3.4. Ces graphes présentent bien entendu une symétrie “rotationnelle” (conservant l’orientation du plongement planaire) d’ordre 4, et, en ne conservant qu’un sommet représentatif de chaque orbite, on obtient les deux graphes de la Figure 3.5, redessinés de manière à faire apparaître le réseau hexagonal. Il y a donc bijection entre les (q)QTFPL utilisant les arêtes fixées de la Figure 3.3, et les couplages parfaits des graphes de la Figure 3.5. Il nous reste à énumérer les couplages parfaits en question, et à montrer que tous les FPL obtenus ont bien le couplage plan désiré.

Commençons par la question des couplages plans des QTFPL contenant les arêtes fixées de la Figure 3.3(a). Considérons, dans un tel FPL, les $2N$ chemins partant d’un des sommets situés sur la ligne AB . Les arêtes horizontales fixées dans le triangle ABC les empêchent de se connecter les uns aux autres dans le triangle, de telle sorte que chaque chemin doit sortir du triangle soit par le haut (le long du segment AC , C compris, A non compris) ou par le bas (segment CB , B compris, C non compris). Chaque chemin sortant par le segment AC sera connecté à un chemin provenant du bord du haut de la grille, et chaque chemin sortant par le segment CB , à un chemin provenant du bord du bas de la grille. Par conséquent, le couplage plan sera de la forme $b^k a^{2N-k}$, où k est le nombre de chemins sortant par le

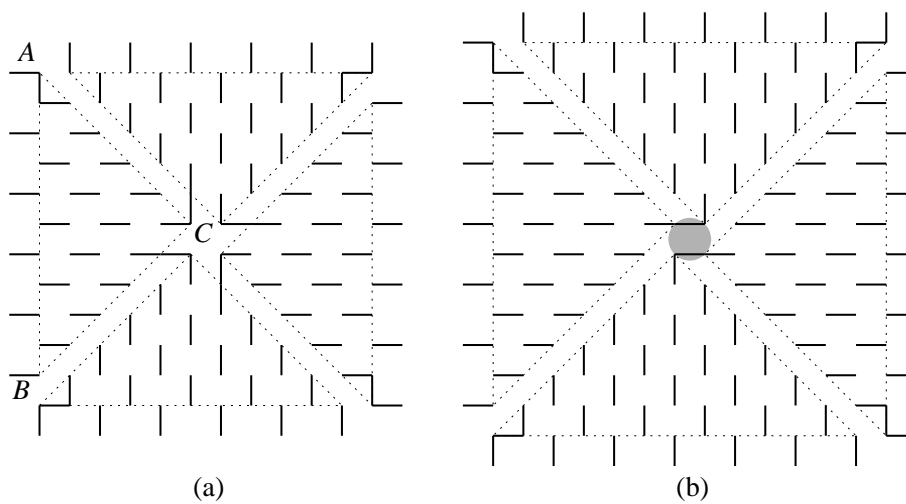


FIG. 3.3 – Arêtes fixées pour (a) $\mathcal{A}_{QT}(12; bbbaaa)$ (b) $\mathcal{A}_{QT}(14; bbbaaaa)$

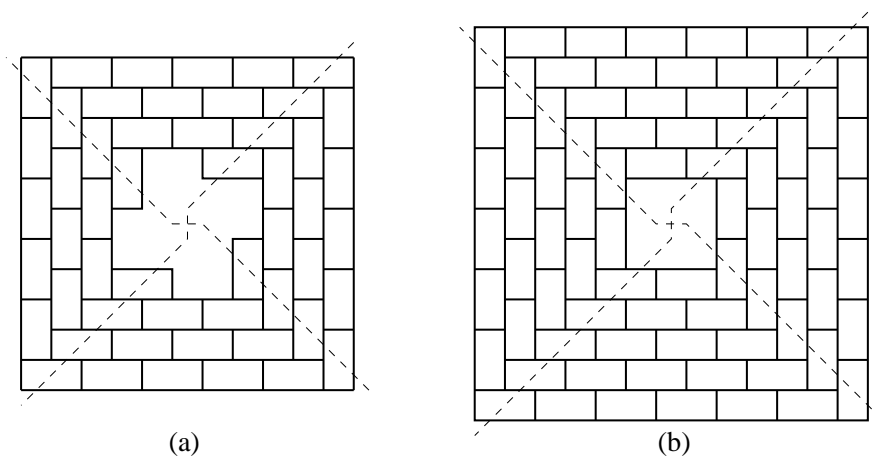


FIG. 3.4 – Arêtes non fixées pour (a) $\mathcal{A}_{QT}(12, bbbaaa)$ (b) $\mathcal{A}_{QT}(14, bbbaaaa)$

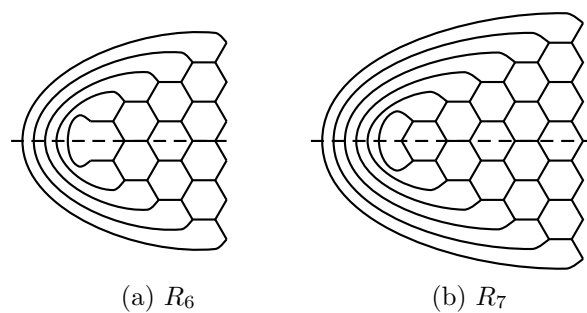


FIG. 3.5 – Régions fondamentales des graphes d'arêtes non fixées de la Figure 3.4

segment AC . Mais la condition d'invariance par quart de tour impose $k = 2N - k$, de telle sorte que le couplage est bien $b^N a^N$.

Pour les qQTFPL contenant les arêtes fixées de la Figure 3.3(b), le raisonnement est le même : les N chemins issus des N premières extrémités du segment AB sortent du triangle par le segment AC , le $N + 1$ -ème sort par le sommet C , et les N derniers, le long du segment CB , de telle sorte que le couplage est bien $b^N ca^N$.

Passons maintenant aux énumérations. Le cas des QTFPL de taille $4N$ est, de fait, déjà réglé : le graphe R_{2N} est exactement celui que l'on obtient en considérant le graphe dont les partitions planes de taille $2N \times 2N \times 2N$ sont les couplages parfaits, et en le quotientant par la rotation d'un sixième de tour ; par conséquent, les QTFPL de taille $4N$ qui contiennent les arêtes fixées sont en bijection avec les partitions planes cycliquement symétriques autocomplémentaires de taille $2N$, dont on sait qu'elles sont comptées par $A(N)^2$.

Pour les qQTFPL de taille $4N + 2$, les couplages parfaits de R_{2N+1} sont également en bijection avec des partitions planes quasi-cycliquement symétriques autocomplémentaires (qCSSCPP), à savoir, les pavages par losanges invariants par rotation d'un sixième de tour d'un hexagone de côté $2N + 1$, privé d'un hexagone de côté 1 en son centre ; toutefois, le fait que ces partitions planes sont effectivement comptées par $A(N)A(N + 1)$ n'était pas préalablement connu, et nous en donnons une preuve, très similaire à celle de Ciucu pour les TSSCPP.

Le graphe R_{2N+1} admettant un plongement plan qui présente une symétrie axiale, le Théorème de Factorisation de Ciucu [16, 17] peut s'appliquer, et son nombre de couplages parfaits s'exprime sous la forme $2^N M^*(R'_{2N+1})$, où R'_{2N+1} est obtenu en "coupant" les arêtes incidente "par en dessous" à l'axe de symétrie, et où $M^*(G)$ désigne l'énumération pondérée des couplages parfaits de G – dans R'_{2N+1} , les arêtes qui se trouvaient sur l'axe de symétrie se voient attribuer un poids $1/2$, chaque couplage parfait étant valué par le produit des poids de ses arêtes. La Figure 3.6(a) montre le graphe G'_{2N+1} sous forme de fragment de réseau hexagonal.

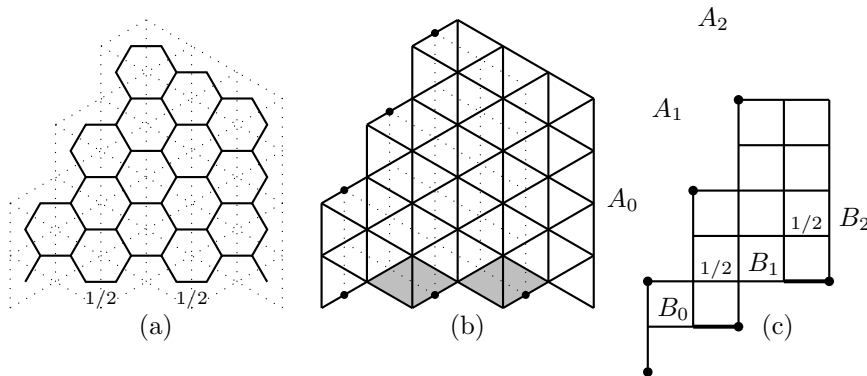


FIG. 3.6 – (a) La région R'_7 , (b) Le réseau triangulaire correspondant et (c) le réseau carré correspondant

En passant bijectivement des couplages parfaits aux pavages par dominos d'une région du réseau triangulaire, puis à des configurations de chemins dirigés ne se coupant pas dans le réseau carré tel qu'indiqué Figure 3.6(b-c). Les chemins en question doivent, au moyen de pas Sud et Est, joindre les sommets A_i aux sommets B_i , $0 \leq i \leq N - 1$, de coordonnées respectives $(i, i + 2)$ et $(2i, i)$; l'arête horizontale sur la gauche de chaque sommet B_i est valuée $1/2$. Ainsi, le comptage (pondéré) de l'ensemble

des chemins joignant A_i à B_j est

$$\begin{aligned} w(A_i, B_j) &= \frac{1}{2} \binom{i+j+1}{2j-i} + \binom{i+j+1}{2j-i-1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\binom{i+j+1}{2j-i} + \binom{i+j+2}{2j-i} \right) \\ &= \frac{1}{2} (3i+4) \frac{(i+j+1)!}{(2j-i)!(2i-j+2)!}. \end{aligned}$$

Le Théorème de Lindström-Gessel-Viennot [48, 39] permet alors d'exprimer $M^*(R'_{2N+1})$ sous la forme d'un déterminant :

$$M^*(G'_{2N+1}) = \det (w(A_i, B_j))_{0 \leq i, j \leq N-1}; \quad (3.13)$$

en sortant un facteur $\frac{3i+4}{2}$ de la ligne i de la matrice, et en réintégrant la puissance de 2 provenant du théorème de Ciucu, le nombre de couplages parfaits de R_{2N+1} devient

$$M(G_{2N+1}) = \left(\prod_{i=0}^{N-1} 3i+4 \right) \det \left(\frac{(i+j+1)!}{(2j-i)!(2i-j+2)!} \right)_{0 \leq i, j \leq N-1}. \quad (3.14)$$

Le déterminant qui apparaît dans (3.14) semble redoutable, mais fort heureusement il est déjà connu : c'est le cas $x = 2, y = 0$ de [42, Théorème 40], là où l'énumération des CSSCPP de taille $2N$ selon la même méthode [17], conduit au cas $x = 1, y = 0$. Le déterminant vaut

$$\prod_{0 \leq i \leq N-1} \frac{i!(i+1)!(3i+3)!(3i+1)!}{(2i+2)!(2i)!(2i+3)!(2i+1)!},$$

et le nombre de couplages parfaits de R_{2N+1} devient

$$p_{2N+1} = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{i!(i+1)!(3i+1)!(3i+4)!}{(2i)!(2i+1)!(2i+2)!(2i+3)!}. \quad (3.15)$$

Il est maintenant immédiat de vérifier que l'on a $p_{2N+1} = A(N)A(N+1)$, par exemple en notant que l'identité est vraie pour $N = 1$ et en calculant les quotients de deux termes consécutifs :

$$\begin{aligned} \frac{p_{2N+1}}{p_{2N-1}} &= \frac{(N-1)!N!(3N-2)!(3N+1)!}{(2N-2)!(2N-1)!(2N)!(2N+1)!} \\ &= \frac{(N-1)!(3N-2)!}{(2N-2)!(2N-1)!} \cdot \frac{N!(3N+1)!}{(2N)!(2N+1)!} \\ &= \frac{A(N)}{A(N-1)} \cdot \frac{A(N+1)}{A(N)}. \end{aligned}$$

■

3.3 Couplages de VFPL et qVFPL

Dans cette section, nous complétons l'étude des couplages de VFPL en nous penchant sur les couplages des FPL complémentaires d'une part, et sur ceux des qVFPL d'autre part.

3.3.1 Couplages des anti-VFPL

L'interprétation fournie par [23] de la distribution des couplages de VFPL, demandait d'adopter la convention selon laquelle la colonne centrale d'un VFPL était occupée par une ligne verticale découpant le FPL en deux parties symétriques. Il se trouve qu'il est également possible d'en donner une correspondant à la convention opposée (c'est-à-dire, d'interpréter la distribution des couplages des complémentaires des VFPL étudiés en 3.1.6.2).

Pour les VFPL de taille $2N + 1$, numérotions donc B_1, \dots, B_{4N+2} les sommets alternatifs du bord de la grille G_{2N+1} , en commençant par $B_1 = (0, N)$. La Figure 3.7 montre cette numérotation, ainsi que les arêtes fixées.

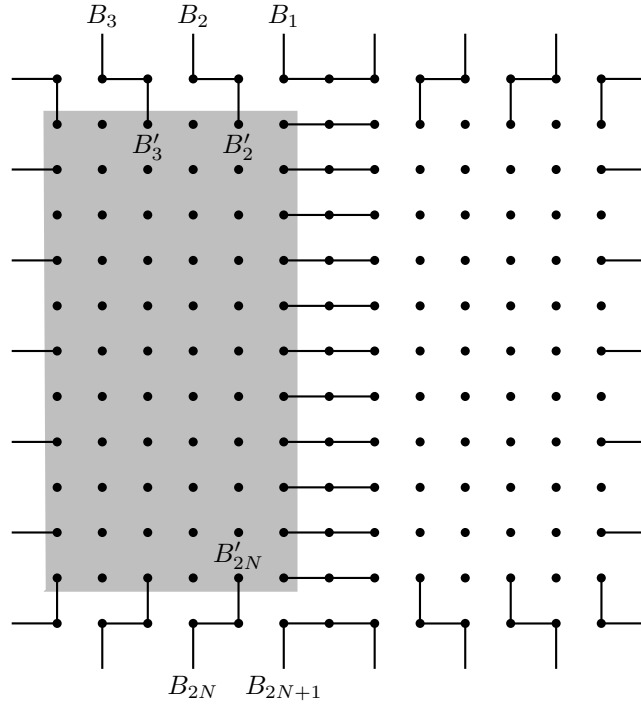


FIG. 3.7 – Arêtes fixées de $\bar{\mathcal{A}}_V(2N + 1)$ pour $N = 6$

Le couplage du VFPL est donc déterminé par le contenu de la demie-grille fondamentale grisée sur la figure ; les sommets chemins joignant deux sommets B'_i et B'_j avec $i, j \leq 2N$ se traduisent par une paire $\{i, j\}$, et ceux joignant un sommet B'_i au bord droit de la demie-grille, par une paire $\{i, 4N + 3 - i\}$. Les couplages possibles, dont nous noterons l'ensemble \mathcal{C}_{2N+1}^o , sont les couplages plans de $4N + 2$ brins contenant les paires $\{1, 4N + 2\}$ et $\{2N + 1, 2N + 2\}$, et la paire $\{4N + 3 - j, 4N + 3 - i\}$ chaque fois que la paire $\{i, j\}$ est incluse.

Avec ces conventions et notations, il est de nouveau possible de proposer une conjecture à la *Razumov-Stroganov* décrivant la distribution des couplages des anti-VFPL :

Conjecture 3.11. *Pour $N \geq 1$ et $1 \leq i \leq 2N$, soit f'_i l'opérateur de $\mathbf{V}(\mathcal{C}_{2N+1}^o)$ dans lui-même, défini par*

$$f'_i = e_{4N+2} \circ e_{2N+1} \circ e_i \circ e_{4N+2-i}. \quad (3.16)$$

Alors en posant

$$H^o = \frac{1}{2N} \sum_{1 \leq i \leq 2N} f'_i, \quad (3.17)$$

le vecteur

$$\mathbf{v} = \sum_{p \in \mathcal{C}_{2N+1}^o} \bar{A}_V(2N+1; p) \mathbf{p} \quad (3.18)$$

est (à normalisation près) l'unique vecteur propre de H^o pour la valeur propre 1.

3.3.2 Couplages des qVFPL de taille paire

Comme c'est le cas pour les qQTFPL, il est possible, au prix d'une légère redéfinition des couplages, de donner une interprétation de la distribution des couplages des qVFPL de taille paire.

La Figure 3.8 montre la partie fixée (arêtes et valeurs de la matrice de hauteurs) des qVFPL de taille $2N$ (ici $N = 5$). La taille paire faisant de toute façon disparaître la symétrie verticale des conditions au bord, nous reprenons les conventions standard pour les conditions au bord (indépendamment de la parité de N), mais renumérotions les extrémités des chemins de telle sorte que A_1 soit le sommet de coordonnées $(2\lfloor N/2 \rfloor - 2, 0)$, *i.e.*, le dernier sommet de la moitié gauche du bord haut pour lequel l'autre extrémité du chemin n'est pas fixée par les conditions de symétrie.

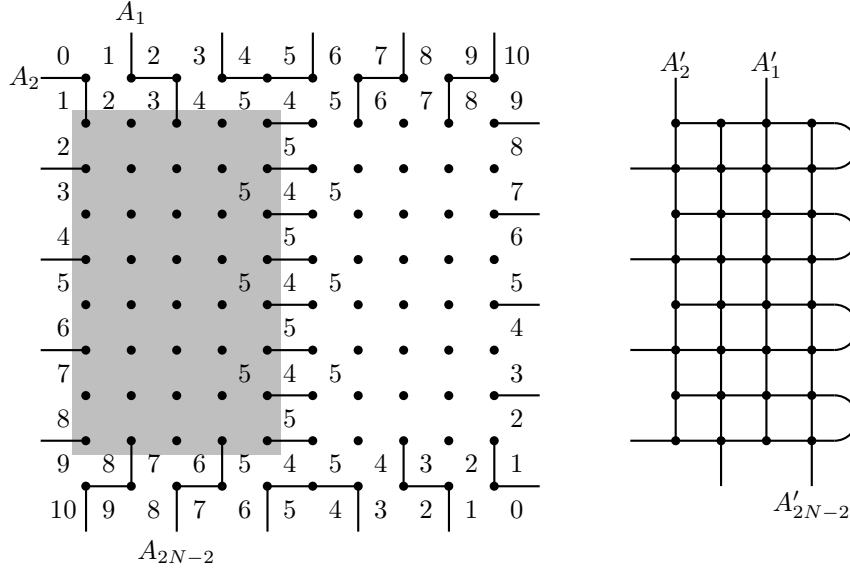


FIG. 3.8 – (a) Arêtes et hauteurs fixées de $A_V(2N)$ (b) Le graphe correspondant à la demie grille

Les qVFPL de taille $2N$ sont donc en bijection avec les FPL sur le graphe G'_N de la figure 3.8(b), dans lequel les arêtes menant au bord droit de la demie-grille, qui sont contraintes d'apparaître par paires, sont transformées en deux fois moins d'arêtes courbes. Définissons le pseudo-couplage d'un qVFPL de taille $2N$ comme le couplage lu sur le FPL correspondant de G'_N . Il s'agit d'un couplage plan, de $2N - 2$ brins, qu'il est naturel de considérer comme un élément de \mathcal{C}_{2N-1}^C , c'est-à-dire comme un couplage de VFPL de taille $2N - 1$. Si l'on se souvient de la relation entre les énumérations

$$A_V(2N) = 2^{N-1} A_V(2N - 1), \quad (3.19)$$

la conjecture suivante ne devrait (presque) pas être une surprise :

Conjecture 3.12. *La distribution des pseudo-couplages de $A_V(2N)$ est identique à celle des couplages de $A_V(2N - 1)$; autrement dit, pour tout $p \in \mathcal{C}_{2N-1}^C$,*

$$A_V(2N; p) = 2^{N-1} A_V(2N - 1; p). \quad (3.20)$$

Cette observation, comme les précédentes, est encore à l'état de conjecture ; Florent Le Gac l'a vérifiée par énumération exhaustive jusqu'à la taille 16. Toutefois, comme dans le cas des qQTFPL, elle est quelque peu soutenue par le fait qu'elle est facile à prouver dans le cas du couplage le plus rare ($a^{N-1}b^{N-1}$, sous forme de mot de Dyck). On a en effet $A_V(2N-1; a^{N-1}b^{N-1}) = 1$, et la Figure 3.9 montre les arêtes fixées de $\mathcal{A}_V(2N, a^{N-1}b^{N-1})$: le seul choix qui reste, pour compléter le FPL, consiste à choisir, pour chacune des arêtes doubles, laquelle prendre, ce qui donne bien exactement 2^{N-1} possibilités.

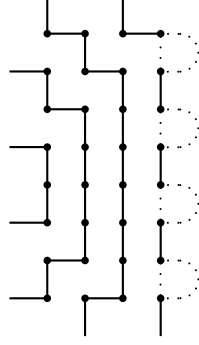


FIG. 3.9 – Arêtes fixées de $\mathcal{A}_V(2N; a^{N-1}b^{N-1})$ dans le cas $N = 5$

Une autre propriété de la distribution des couplages de VFPL de taille $2N-1$ qui n'est pas immédiate sur celle des qVFPL de taille $2N$ en raison de l'asymétrie verticale du graphe de la Figure 3.8(b), est l'invariance par la symétrie $i \leftrightarrow 2N-1-i$, qui chez les VFPL découle de la symétrie horizontale. Cette propriété découle de l'application de la gyration de Wieland : en appliquant $H_0 \circ C$ à un FPL sur ce graphe (en convenant que, ici, la case dans le coin supérieur gauche est une case impaire, ce qui correspond à sa parité dans le graphe de la Figure 3.8(a) ; en particulier, les paires d'arêtes doubles du sont considérées comme enserrant une case paire, et sont donc systématiquement inversées), on obtient le complémentaire d'un FPL qui, après symétrie horizontale, donne un FPL dont le couplage a précisément subi la symétrie $i \leftrightarrow 2N-1-i$ par rapport à celui de départ.

3.4 Une piste d'attaque probabiliste et combinatoire

Toutes les conjectures “à la Razumov-Strogonov” que nous avons vues, sont de la forme, “la distribution des couplages associés à la classe X de FPL est l'unique distribution stationnaire de telle chaîne de Markov Y ”. Potentiellement, chacune d'entre elles peut être prouvée en construisant une chaîne de Markov dont les états sont les FPL de la classe en question, avec pour la distribution uniforme comme distribution stationnaire, et qui se “projetterait”, en n'observant que les couplages, sur la chaîne voulue sur les couplages. En traduisant les chaînes de Markov en marches aléatoires (non biaisées) sur des graphes orientés, et en prenant l'exemple de la Conjecture 3.1, le problème devient :

Construire un graphe orienté, à arêtes multiples, d'ensemble de sommets $\mathcal{A}(N)$, tel que

1. *chaque sommet ait degré sortant $2N$;*
2. *chaque sommet ait degré entrant $2N$;*
3. *pour chaque sommet f , et chaque couplage p , il y a autant d'arêtes (f, f') avec $C(f') = p$ qu'il y a d'opérateurs e_i tels que $e_i(C(f)) = p$.*

Les conditions (1) et (2) impliquent que la marche aléatoire non biaisée sur le graphe, laisse la distribution uniforme invariante, et que chaque composante connexe du graphe non-orienté sous-jacent, soit également une composante fortement connexe (chaque composante fortement connexe doit avoir autant d'arêtes entrantes que sortantes, ce qui, dans un graphe fini, implique que composantes connexes et fortement connexes sont confondues). La condition (3) implique que l'unique sommet u de couplage $p = a^N b^N$ est accessible à partir de tout autre sommet, et qu'il existe exactement 2 boucles (u, u)

(correspondant aux opérateurs e_N et e_{2N} qui laissent invariants le couplage); par conséquent, le graphe sera automatiquement fortement connexe, et la marche aléatoire, ergodique.

La condition (3) revient à dire que les $2N$ arêtes issues de chaque sommet u peuvent être étiquetées par les $2N$ entiers $1, \dots, 2N$, de telle sorte que, si une arête (u, v) est étiquetée i , on ait $C(v) = e_i(C(u))$.

Dit encore autrement, il s'agit de définir $2N$ opérateurs E_1, \dots, E_{2N} sur les FPL de taille N , qui sur les couplages se traduisent par les opérateurs de croisement de brins :

$$c(E_i(f)) = e_i(c(f)),$$

et tels que le vecteur $\sum_{f \in \mathcal{A}(N)} \mathbf{f}$ soit vecteur propre (pour la valeur propre $2N$) de l'opérateur $\sum_{i=1}^{2N} E_i$. Ou encore, une bijection

$$\Phi : \mathcal{A}(N) \times [[1, 2N]] \rightarrow \mathcal{A}(N) \times [[1, 2N]],$$

telle que, si $\Phi(f, i) = (f', i')$, on ait

$$c(f') = e_i(c(f)). \quad (3.21)$$

Pour guider la construction d'une telle bijection Φ , il serait bon d'avoir une interprétation de i' , qui pour l'instant n'est là que comme un artifice pour assurer la stationnarité de la loi uniforme pour la marche aléatoire. Une idée qui semble naturelle (mais qui impliquerait plus que la seule Conjecture 3.1) est d'interpréter i' sur les couplages des FPL complémentaires, c'est-à-dire de demander que l'on ait également

$$(f', i') = \Phi(f, i) \implies \bar{c}(f) = e_i(\bar{c}(f')).$$

Une telle construction fournirait, en plus d'une preuve de la conjecture, une chaîne de Markov qui aurait la double propriété de se projeter sur la chaîne de Markov sur les couplages à travers la fonction couplage c , mais aussi, à travers la fonction "couplages des complémentaires" \bar{c} et modulo un renversement du temps. On peut aller un peu plus loin, et demander que la chaîne sur les FPL (dans sa distribution stationnaire) voie sa loi inchangée lorsque l'on renverse le temps et qu'on passe aux FPL complémentaires par l'intermédiaire de la symétrie diagonale. Si l'on ajoute la symétrie verticale (qui, selon que N est pair ou impair, envoie les FPL sur les anti-FPL ou sur les FPL), on arrive à des conditions supplémentaires sur Φ : toujours en notant $(f', i') = \Phi(f, i)$, on devrait avoir

$$\Phi(\sigma_D(f'), i') = (\sigma_D(f), i) \quad (3.22)$$

$$\Phi\left(\sigma_V(f), \frac{3N+1}{2} - i\right) = \left(\sigma_V(f'), \frac{3N+1}{2} - i\right) \quad (N \text{ impair}) \quad (3.23)$$

$$\Phi\left(\sigma_D(\sigma_V(f)), \frac{3N}{2} - 1, \cdot\right) = \left(\sigma_D(\sigma_V(f')), \frac{3N}{2} - i'\right) \quad (N \text{ pair}) \quad (3.24)$$

(les indices sont ici, comme toujours, à prendre modulo $2N$).

Il est difficile de donner une caractérisation plus algébrique des conditions cherchées ici, ce qui complique singulièrement la vérification, même pour de petites tailles, de la simple *existence* d'une fonction Φ satisfaisant ces conditions. La vérification reste facile pour les 7 FPL de taille 3. Pour les tailles 4 (42 FPL) et 5 (429 FPL), il reste possible d'utiliser des outils de résolution de programmes linéaires en nombres entiers (et la réponse est positive). Dès la taille 6 (7436 FPL), le programme linéaire naïf (utilisant, avant réduction, une variable par paire de FPL pour compter le nombre d'arêtes entre les deux) aurait plusieurs millions de variables.

3.4.1 Distribution conjointe des couplages et anti-couplages

L'hypothétique construction décrite dans le paragraphe précédent est difficile à caractériser, mais son existence aurait des conséquences sur la distribution conjointe des couplages et des anti-couplages de FPL. Si l'on considère le graphe orienté \mathcal{P}_N des couplages plans sur $2N$ brins, avec une arête d'un couplage p à un couplage p' lorsqu'il existe un e_i tel que $e_i(p) = p'$, l'existence d'une bijection Φ satisfaisant (3.21-3.4) implique que la formulation suivante :

Conjecture 3.13. Soit d_N la distance orientée dans le graphe \mathcal{P}_N (i.e., $d_N(p, p')$ est le plus petit entier k tel qu'il existe une suite de couplages $p = p_0, p_1, \dots, p_k = p'$ et une suite d'entiers i_1, \dots, i_k , telles que l'on ait $p_{j+1} = e_{i_{j+1}}(p_j)$). Alors, pour tout triplet de couplages (p, p', p'') tel que $\mathcal{A}(N; p, p') \neq \emptyset$, il existe un couplage p''' satisfaisant

$$\mathcal{A}(p'', p''') \neq \emptyset \quad (3.25)$$

$$d_N(p''', p') \leq d_N(p, p''). \quad (3.26)$$

Dans le cas particulier où p'' est le couplage “tout parallèle” $p_0 = a^N b^N$ ou l'une de ses images par rotations, les conditions ci-dessus se simplifient, puisque le seul FPL de couplage p'' a également p'' comme anti-couplage. La condition devient donc : pour tout (p, p') tel que $\mathcal{A}(N; p, p') \neq \emptyset$,

$$d_N(p_0, p') \leq d_N(p, p_0). \quad (3.27)$$

Notons qu'il est facile, avec les mêmes idées, de vérifier qu'il n'est pas possible d'avoir une chaîne de Markov sur les FPL qui se projette à la fois sur celle des couplages et celle des anti-couplages (sans renversement du temps) : le FPL f de la Figure 3.10 a pour couplage $abaaabbbab$, qui peut être transformé en $aaaaabbbbb$ par e_1 , mais son anti-couplage est $aabaabbbab$, qui ne peut pas être transformé en $aaaaabbbbb$ en une étape.

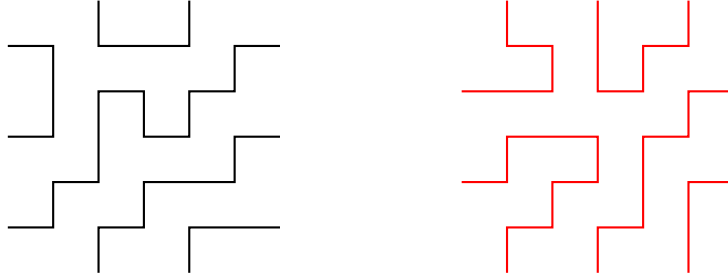


FIG. 3.10 – Un FPL de couplage $abaaabbbab$, et d'anticouplage $aabaabbbab$

La Conjecture 3.13 a été vérifiée, par énumération exhaustive, jusqu'à la taille 7. Le calcul de d_N (sans passer par le parcours du graphe \mathcal{P}_N) était l'un des objectifs du mémoire de Master de Florent Le Gac [47], objectif qui s'est révélé trop ambitieux malgré les résultats d'encadrements obtenus.

Il convient de noter que (3.27) n'est, d'une certaine manière, pas très difficile à satisfaire : les distances vers le couplage p_0 ont tendance à être grandes.

Par ailleurs, pour les petites valeurs de $d_N(p, p_0)$, Caselli *et al.* [15] démontrent que le nombre de FPL ayant un couplage donné, de la forme $a^{N-k} \pi b^{N-k} \pi'$, où π et π' sont deux mots de Dyck de longueur totale $2k$, s'exprime (pour N assez grand, lorsque ni π ni π' n'est vide) comme un polynôme de N dont le degré est la somme des tailles des diagrammes de Ferrers associés aux mots de Dyck. Il n'est pas difficile de se convaincre que (au moins pour N assez grand) ce degré est exactement la distance du couplage à p_0 (ou plutôt, à $R^j(p_0)$, où j est la demie-longueur de π').

Lorsque cette distance est de 1 (ce qui correspond aux deux couplages $a^{N-2} ababb^{N-2}$ et $aba^{N-2} b^{N-2} ab$), le nombre de FPL est de $N - 1$, et, en plaçant le couplage comme dans [15], on se convainc aisément que les anti-couplages associés sont exactement de la forme $a^k aba^{N-k-2} b^{N-k-2} abb^k$, soit tous les couplages (autres que p_0 lui-mêmes) atteints à partir de p_0 en appliquant l'un des opérateurs e_i . Ainsi, (3.27) est au moins vraie lorsque $d_N(p, p_0)$ vaut 1.

3.4.2 Une tentative de construction pour Φ

Nous savons quelles sont les propriétés que nous souhaitons pour notre bijection Φ : elle doit “croiser deux brins” sur le couplage d'un FPL, et, lorsque l'on applique Φ^{-1} , cela doit correspondre à croiser deux brins du FPL complémentaire, si possible en utilisant le même type de règles.

Dans ce paragraphe, nous décrivons une construction qui, lorsqu'elle fonctionne, a bien ces deux propriétés. "Lorsqu'elle fonctionne" : si elle fonctionnait toujours, nous aurions la preuve souhaitée. Il s'agit donc d'une tentative infructueuse, mais qui semble toutefois prometteuse.

Prenons un FPL f , sur lequel nous distinguons deux brins consécutifs i et $i+1$. Ignorons pour l'instant la possibilité que ces deux brins soient reliés par un chemin de longueur minimale (2, sauf si l'une des deux extrémités se trouve dans un coin de la grille ; cela correspond au cas où, dans la matrice à signes alternants correspondant à f , l'unique 1 de la première ou dernière ligne ou colonne se trouve exactement entre les deux extrémités choisies) : localement, le bord du FPL ressemble à la Figure 3.11(a), l'une des deux arêtes séparant les deux extrémités choisies est occupée, l'autre non. Invertissons la case du bord qui est bordée par l'arête non occupée (Figure 3.11(b)). Le résultat est presque un FPL : un sommet de la grille a degré 4 au lieu de 2, et les arêtes du bord ne sont plus occupées et libres en alternance parfaite. Remarquons toutefois que, d'une part, l'anti-couplage n'a pas changé, et que, d'autre part, le couplage est devenu $e_i(c(f))$, pour peu que l'on sépare les 4 arêtes incidentes au sommet de degré 4 comme indiqué sur la figure.

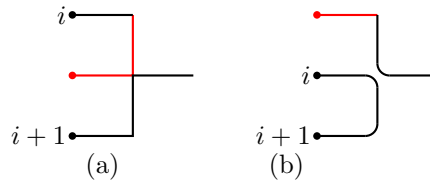


FIG. 3.11 – Conditions au bord et début de la transformation

Pour l'instant, considérons que la violation de la condition "degré 2 partout" est plus grave que la perturbation des bords, et essayons de la corriger *sans perturber ni le couplage, ni l'anti-couplage*. Pour cela, nous inversons le bord de la case marquée d'un point sur la Figure 3.11(b), et, successivement, chaque fois que l'inversion d'une case crée un sommet de degré 0 ou 4, nous inversons également la case de même parité qui partage ce sommet de manière à rétablir la condition de degré. Cette série d'inversions de cases se poursuit jusqu'à ce que la perturbation atteigne le bord de la grille ; voir la Figure 3.12 pour un exemple.

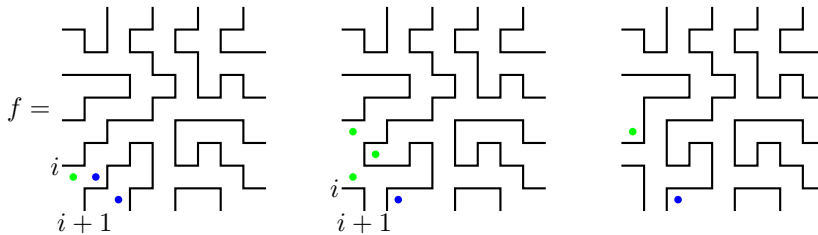


FIG. 3.12 – Premières séries d'inversions

Le résultat de cette première étape est un FPL, à ceci près que deux cases du bord (la case initiale, et celle où se termine la séquence d'inversions) ont vu leurs arêtes perturbées. Pour "corriger" l'inversion de la case initiale, nous lançons une nouvelle série d'inversions, issue de cette case, toujours en inversant également les cases voisines lorsque la condition de degré est violée.

Nous continuons le processus : après chaque série d'inversions, nous avons un FPL dont deux cases du bord (de parités différentes) ont vu leurs arêtes inversées, et l'une d'elles (celle qui n'a pas été créée par la dernière série d'inversions) sert de point de départ à une nouvelle série. L'ensemble s'arrête, si tout se passe bien, lorsque la série d'inversions en cours est amenée à inverser la case de la grille adjacente à la dernière anomalie du bord : celle-ci est alors également inversée, ce qui nous ramène dans le monde des "vrais" FPL.

Chaque série d'inversions laisse invariants couplage et anti-couplage, en dehors de la première (qui

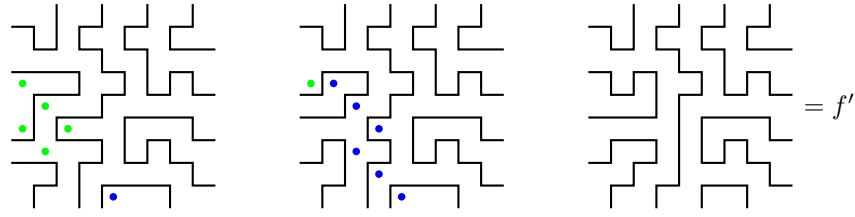


FIG. 3.13 – Fin de la transformation

remplace le couplage $c(f)$ par $e_i(c(f))$ et de la dernière, qui soit change de nouveau le couplage en lui appliquant un nouvel opérateur, soit transforme un anticouplage de la forme $e_j(\bar{c}(f'))$ en $\bar{c}(f')$.

Il semble que ce soit toujours ce dernier cas de figure qui se présente. Si l'on relance le même processus, en partant de l'anti-FPL complémentaire du FPL f' obtenu, et en inversant initialement la case où tout se termine, on est amené à inverser exactement les mêmes séries de cases dans l'ordre inverse, ce qui est conforme à l'idée que l'inverse de notre bijection devrait être obtenue en appliquant les mêmes règles aux anti-FPL.

Malheureusement, il arrive que le processus, au moins tel qu'il est décrit ici, ne fonctionne pas. Lorsqu'une série d'inversions est amenée à inverser une case qui, dans le FPL ou l'anti-FPL, forme un cycle de longueur 4, il se peut qu'elle se termine non pas en inversant une nouvelle case du bord, mais trois. Dans une telle situation, la marche à suivre n'est pas claire, et aucune des variantes que j'ai pu définir ne semble fonctionner.

3.5 Conclusion

Nous avons vu, au cours de ce chapitre, une profusion de conjectures proposant des interprétations de la distribution des couplages de différentes classes de symétrie de FPL – beaucoup de conjectures, et malheureusement bien peu de preuves. Il semble que, quasiment chaque fois que deux classes de symétrie sont liées par une formule d'énumération impliquant que le nombre de FPL de la “grosse” classe est un multiple du nombre de FPL de la “petite” classe, il soit possible de trouver un lien entre les distributions de couplages des deux classes.

Lorsqu'il s'agit de prouver les nombreuses conjectures apparues dans le domaine ces dernières années, l'approche “bijective” évoquée plus haut n'a pas remporté les mêmes succès que les techniques plus algébriques d'autres auteurs. Elle n'en reste pas moins attrayante, et est source de questions qui peuvent s'avérer fructueuses. En particulier, trouver une interprétation combinatoire de la distribution jointe des couplages et anti-couplages (des FPL sans symétries particulières, ou d'autres classes) pourrait apporter des indications précieuses. Dans le même ordre d'idée, on peut se demander si la distribution des couplages des QTASM de tailles impaires (qui n'a pas de propriété d'invariance par rotation ; la parité des cases n'étant pas conservée par le quart de tour pour les tailles impaires, la gyration de Wieland ne conserve pas cette classe de symétrie) peut être interprétée en termes d'invariance par des opérateurs à identifier, voire reliée à la distribution des couplages de HTFPL de taille (environ) deux fois moindre.

Chapitre 4

Ensembles partiellement ordonnés de FPL et génération aléatoire

Dans ce chapitre, nous nous penchons sur la structure d'ensemble partiellement ordonné que présentent les matrices à signes alternants. L'application principale est ici la génération aléatoire uniforme de matrices à signes alternants avec ou sans conditions de symétrie. C'est l'occasion de décrire une variante de l'algorithme de génération de "couplage depuis le passé" (Coupling from the Past, ou CFTP), issue d'un travail en commun avec Florent Le Gac, et qui est particulièrement adaptée à la génération aléatoire de FPL (quasi-)symétriques. Enfin, nous nous pencherons sur les ensembles de FPL partageant un même couplage, et en particulier sur la question de leur connexité pour une notion naturelle d'adjacence.

4.1 Treillis des FPL de taille donnée

Jusqu'à présent, nous avons considéré l'ensemble des FPL d'une taille donnée essentiellement à travers la correspondance avec les orientations eulériennes d'une grille carrée. Il se trouve que la façon la plus simple de décrire l'ordre partiel naturel sur les FPL est plutôt à travers les matrices de hauteurs.

Définition 4.1 (ordre sur les matrices de hauteurs). *Soient $A = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq N}$ et $B = (b_{i,j})_{0 \leq i,j \leq N}$ deux matrices de hauteurs de même taille. On dira que A est inférieure à B , et on notera $A \leq B$, si l'on a $a_{i,j} \leq b_{i,j}$ pour tous i et j .*

L'ordre partiel ainsi défini sur $\mathcal{H}(N)$ n'est rien d'autre que (la restriction à $\mathcal{H}(N)$ de) l'ordre produit sur l'ensemble de toutes les matrices carrées (à coefficients dans \mathbb{N} , disons) correspondant à la comparaison coefficient par coefficient.

Ce qui est un tout petit peu moins immédiat, c'est que $(\mathcal{H}(N), \leq)$ forme un *treillis distributif* : si l'on pose, pour tous i et j , $m_{i,j} = \min(a_{i,j}, b_{i,j})$ et $m'_{i,j} = \max(a_{i,j}, b_{i,j})$, il est facile de voir que les matrices $M = (m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq N}$ et $M' = (m'_{i,j})_{0 \leq i,j \leq N}$, qui sont respectivement le plus grand minorant et le plus petit majorant communs de A et B dans l'ensemble de toutes les matrices à coefficients entiers, sont également des matrices de hauteurs.

La Figure 4.1 montre le treillis formé par les 7 ASM (ou FPL, ou matrices de hauteurs, correspondantes) de taille 3. Les flèches indiquent les relations de couverture, ainsi que les coordonnées de l'unique coefficient qui diffère entre deux matrices voisines.

Comme tout treillis distributif fini, $(\mathcal{H}(N), \leq)$ est isomorphe, en tant qu'ensemble ordonné, au treillis des idéaux d'un ensemble fini partiellement ordonné. Ici, il est particulièrement simple de décrire explicitement cet ensemble, que nous nommerons P_N (la preuve est élémentaire, il s'agit de vérifier que tout fonctionne) :

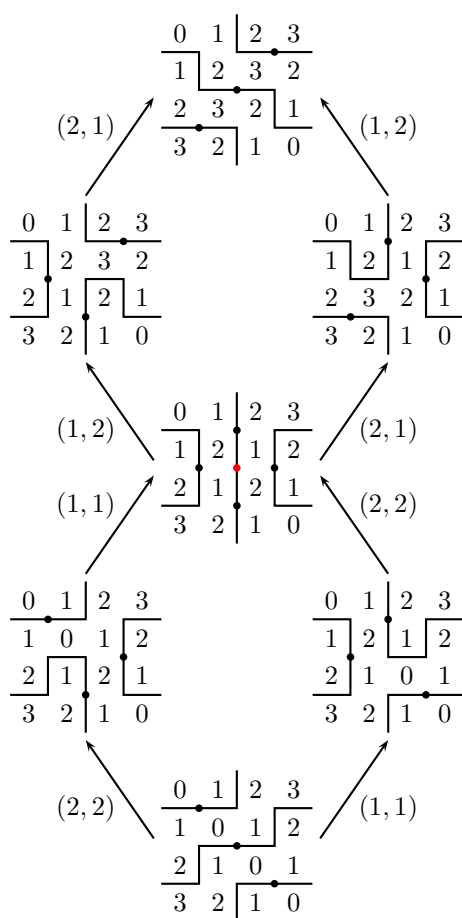


FIG. 4.1 – Le treillis des FPL de taille 3

Proposition 4.1. *Soit P_N l'ensemble*

$P_N = \{(i, j, k) \in [[1, N-1]] \times [[1, N-1]] \times [[2, N]] : i + j + k \equiv 0 \pmod{2}, |i - j| < k \leq N - |N - i - j|\}$,
muni de la relation d'ordre \leq définie par

$$(i, j, k) \leq (i', j', k') \iff k' \geq k + |i - i'| + |k - k'|.$$

Alors le treillis des idéaux de P_N , ordonné par l'inclusion, $(J(P_N), \subseteq)$ est isomorphe à $(\mathcal{H}(N), \leq)$, et un isomorphisme est donné par $\Phi : \mathcal{H}(N) \rightarrow J(P_N)$ définie ainsi :

$$\Phi(M) = \{(i, j, k) \in P_N : k \leq m_{i,j}\}.$$

La réciproque de Φ est donnée par $\Psi(I) = (m_{i,j})_{0 \leq i, j \leq N}$, avec

$$m_{i,j} = \max(|i - j|, \sup\{k : (i, j, k) \in I\}).$$

4.1.1 Classes de symétrie et ordre partiel

Il se trouve que toutes les classes de symétrie de FPL ou d'ASM peuvent être définies en termes des idéaux de P_N , et que les classes de quasi-symétrie ont également une définition assez naturelles en ces termes.

Commençons par le cas des ASM diagonalement symétriques. Un ASM est diagonalement symétrique si l'on a $m_{i,j} = m_{j,i}$. En termes de l'idéal I de P_N associé, cela correspond à dire que, chaque fois que l'on a $(i, j, k) \in I$, on a $\sigma_D(i, j, k) = (j, i, k) \in I$. En d'autres termes, les idéaux de P_N associés aux ASM diagonalement symétriques sont exactement ceux qui sont invariants par l'involution

$$\sigma_H : (i, j, k) \mapsto (j, i, k).$$

L'involution σ_H est un automorphisme de P_N : une bijection de P_N dans lui-même telle que l'on ait

$$\sigma_H(i, j, k) \leq \sigma_H(i', j', k') \iff (i, j, k) \leq (i', j', k').$$

Par conséquent, les idéaux invariants par σ_H sont également ordonnés par l'inclusion, et sont en bijection naturelle avec les idéaux de P_N quotienté par la relation d'équivalence formée des orbites de σ_H .

La situation est très similaire pour deux autres classes de symétrie : les ASM doublement diagonalement symétriques, et les ASM (ou FPL) invariants par demi tour. Dans le premier cas, on considère les idéaux de P_N invariants par σ_H et par σ_A définie par $\sigma_A(i, j, k) = (N - j, N - i, k)$ (ou, de manière équivalente, par le groupe d'automorphismes engendré par σ_A et σ_H). Dans le second cas, on ne demande que l'invariance par la composée $\sigma_C = \sigma_H \circ \sigma_A$, qui échange (i, j, k) et $(N - i, N - j, k)$.

Nous avons, en gros, épuisé tous les automorphismes de P_N . *Quid* des autres classes de symétrie? Si nous prenons l'exemple des VASM (symétrie verticale), la condition sur les matrices de hauteurs,

$$h_{i,j} = N - h_{i, N-j},$$

se traduit en termes des idéaux de P_N correspondants, par

$$(i, j, k) \in I \iff (i, N - j, N - k + 2) \notin I.$$

En d'autres termes, un idéal de P_N correspond à un VASM s'il est transformé en son *complémentaire* par l'involution

$$\sigma_V : (i, j, k) \mapsto (i, N - j, N - k + 2).$$

Ici, σ_V est une bijection *décroissante* de P_N dans lui-même : on a

$$(i, j, k) \leq (i', j', k') \iff \sigma_V(i, j, k) \geq \sigma_V(i', j', k').$$

Tout ceci nous amène assez naturellement à poser la définition suivante :

Définition 4.2. Soit (P, \leq) un ensemble fini partiellement ordonné, et G un sous-groupe du groupe de l'ensemble des bijections de P dans lui-même qui sont, soit croissantes, soit décroissantes¹.

Nous dirons qu'un idéal I de P est G -symétrique si, pour tout $g \in G$,

- si g est croissante, $g(I) = I$;
- si g est décroissante, $g(I) = P - I$.

Cette définition nous permet de capturer toutes les classes de symétrie d'ASM déjà définies. Il n'est pas difficile de vérifier que, dans le cas de P_N , le groupe G est engendré par σ_H et σ_D . En effet, les éléments maximaux de P_N sont de la forme $(i, N - i, N)$, et les éléments minimaux, de la forme $(i, i, 2)$. Tout $g \in G$ doit nécessairement permuter éléments minimaux et maximaux, soit en les échangeant (cas décroissant), soit en permutant séparément minimaux entre eux et maximaux entre eux. De plus, la présence d'un élément $(i, i + 1, 3)$ qui couvre à la fois $(i, i, 2)$ et $(i + 1, i + 1, 2)$ impose que $g(1, 1, 2)$ se trouve parmi $(1, 1, 2)$, $(N - 1, N - 1, 2)$, $(1, N - 1, N)$ et $(N - 1, 1, N)$. Dans chaque cas, il existe deux possibilités pour $g(1, N - 1, N)$, et on obtient ainsi une description complète des 8 éléments de G , résumée dans le tableau suivant. Ces bijections correspondent, au total, aux 8 isométries du carré.

	$g(1, N - 1, N)$			
$g(1, 1, 2)$	$(1, 1, 2)$	$(N - 1, N - 1, 2)$	$(1, N - 1, N)$	$(N - 1, 1, N)$
$(1, 1, 2)$	\emptyset	\emptyset	I	σ_D
$(N - 1, N - 1, 2)$	\emptyset	\emptyset	$\sigma_A = \sigma_H \sigma_D \sigma_H$	$\sigma_C = \sigma_H \sigma_D \sigma_H \sigma_D$
$(1, N - 1, N)$	σ_H	$\sigma_R = \sigma_H \sigma_D$	\emptyset	\emptyset
$(N - 1, 1, N)$	$\sigma_R^{-1} = \sigma_D \sigma_H$	$\sigma_V = \sigma_D \sigma_H \sigma_D$	\emptyset	\emptyset

Ainsi, pour chaque classe de symétrie, nous pouvons identifier une ou deux bijections qui engendrent un sous-groupe correspondant :

- pour \mathcal{A}_V , σ_V ;
- pour \mathcal{A}_D , σ_D ;
- pour \mathcal{A}_{HT} , $\sigma_C = \sigma_H \circ \sigma_D \circ \sigma_H \circ \sigma_D$;
- pour \mathcal{A}_{QT} , $\sigma_R = \sigma_H \sigma_D$;
- pour \mathcal{A}_{DD} , σ_D et $\sigma_A = \sigma_H \circ \sigma_D \circ \sigma_H$;
- pour \mathcal{A}_{VH} , σ_H et $\sigma_V = \sigma_D \circ \sigma_H \circ \sigma_D$;
- pour \mathcal{A}_T , σ_D et σ_H .

Les classes de *quasi-symétrie* que nous avons préalablement définies pour certaines parités de taille (par exemple, les qVASM de taille paire), correspondent à des situations où il n'existe pas d'idéaux G -symétriques. Cela se produit lorsque G contient une bijection décroissante admettant un point fixe, ou plus généralement, une bijection décroissante g^- et une croissante g^+ telles qu'il existe un élément x satisfaisant $g^+(x) = g^-(x)$ (de telle sorte que si l'on commence par quotienter par le sous-groupe de G ne contenant que les automorphismes, l'image de g^- ait un point fixe). En effet, la seule existence d'un point fixe pour l'une des bijections décroissantes suffit à rendre impossible l'existence d'un idéal G -symétrique.

Cette situation se produit exactement dans les cas suivant :

- pour σ_V : si la taille est paire, $m = 2N$, les éléments de la forme $(2i + 1, m, m + 1)$ sont points fixes; de même, σ_H a alors les éléments de la forme $(m, 2i + 1, m + 1)$ pour points fixes;
- pour σ_R : si la taille est paire mais non multiple de 4, $m = 4N + 2$, l'élément $(2N + 1, 2N + 1, 2N + 2)$ est point fixe.

Au total, cela nous conduit naturellement à une nouvelle définition :

Définition 4.3. Soit (P, \leq) un ensemble fini partiellement ordonné, et G un sous-groupe du groupe des bijections soit croissantes, soit décroissantes de P dans lui-même. Notons G^+ le sous-groupe de G formé des seules bijections croissantes, et G^- l'ensemble complémentaire² des bijections décroissantes.

¹Il ne semble pas exister de terme standard pour désigner à la fois les automorphismes d'un ensemble partiellement ordonnés, et les isomorphismes vers son dual

²Nous excluons d'office la situation où aucun élément de P ne serait comparable à un autre, seul cas où une bijection pourrait être à la fois croissante et décroissante.

Nous dirons qu'un élément x de P est critique si $G^+(x) \cap G^-(x) \neq \emptyset$, et noterons C_G l'ensemble des éléments critiques de P .

Nous dirons qu'un idéal I de P est quasi- G -symétrique, si C_G n'est pas vide et que

- pour tout $g \in G^+$, $g(I) = I$;
- pour tout $g \in G^-$, $g(I) = P - C_G - I$.

D'une certaine manière, les éléments critiques sont des obstacles à l'existence d'idéaux G -symétriques, et nous faisons le choix de les exclure systématiquement des idéaux quasi-symétriques. De manière équivalente, nous pouvons considérer les idéaux G -symétriques de l'ensemble P privé de ses éléments critiques.

Avec cette nouvelle définition, les ASM quasi-symétriques définis au Chapitre 1 sont exactement en correspondance avec les idéaux quasi-symétriques pour les groupes définis ci-dessus.

4.1.2 Le cas des partitions planes

Il existe au moins une autre famille d'objets que l'on peut naturellement définir comme les idéaux d'un ensemble partiellement ordonné présentant un groupe d'automorphismes (et d'"automorphismes décroissants") non trivial : les partitions planes incluses dans une boîte cubique, dont l'énumération des classes de symétrie semble fréquemment imbriquée avec celle des classes de symétrie d'ASM.

En particulier, les qCSSCPP (partitions planes quasi-cycliquement symétriques auto-complémentaires, ou pavages de l'hexagone quasi invariants par rotation d'un sixième de tour) de taille $2N + 1$, dont nous avons prouvé "en passant" au Chapitre 3, lors de la preuve du Théorème 3.10, qu'elles sont au nombre de $A(N)A(N + 1)$, sont exactement les idéaux de $[[1, 2N + 1]] \times [[1, 2N + 1]] \times [[1, 2N + 1]]$ quasi-symétriques pour la transformation (décroissante) $(i, j, k) \mapsto (2N + 2 - j, 2N + 2 - k, 2N + 2 - i)$, présentant un unique point fixe $(N + 1, N + 1, N + 1)$.

Grosso modo, ce qui est décrit dans la section suivante concernant la génération aléatoire d'ASM présentant des conditions de symétrie peut s'appliquer, *mutatis mutandis*, à la génération aléatoire de partition planes.

4.2 Génération aléatoire : l'algorithme Sym-CFTP

L'algorithme du *couplage depuis le passé* (CFTP pour *Coupling from the Past*), dû à Propp et Wilson, est un algorithme permettant de tirer un état aléatoire distribué *exactement* selon la distribution stationnaire d'une chaîne de Markov ergodique. Il est particulièrement adapté aux situations où l'espace d'états peut être décrit comme un treillis distributif fini, pour peu que la chaîne de Markov respecte d'une certaine manière cette structure.

Dans cette section, nous décrivons d'abord l'algorithme de Propp et Wilson, puis une variante, décrite dans [34], initialement conçue pour la génération aléatoire de FPL présentant des conditions de symétrie. La présentation de l'algorithme de CFTP classique ne prétend pas à l'originalité ; l'idée est plutôt de faire apparaître la variante du "CFTP symétrique" comme naturelle.

4.2.1 CFTP classique

Considérons une chaîne de Markov (sur un ensemble d'états S fini) dont nous supposons que les probabilités de transition sont décrites au moyen d'un ensemble (forcément fini) de *fonctions de mise à jour*, c'est-à-dire que l'on dispose d'un ensemble \mathcal{F} de fonctions de S dans lui-même, et d'une loi de probabilités sur \mathcal{F} , de telle sorte que choisir une fonction $f \in \mathcal{F}$ selon la loi de probabilités et remplacer l'état courant de la chaîne par son image, soit une façon correcte de simuler un pas de temps de la chaîne. Formellement, si les probabilités de transitions sont notées $p_{s,s'}$ et que la loi de probabilités sur \mathcal{F} est notée μ , la condition s'écrit, pour tous états s et s' ,

$$p_{s,s'} = \mu(\{f \in \mathcal{F} : f(s) = s'\}). \quad (4.1)$$

A priori, une telle formulation est beaucoup plus précise que la seule description de la matrice des probabilités de transition, mais dans la pratique, il est fréquent, dans des situations de type combinatoire, que la description “algorithmique” d’une chaîne de Markov soit facilement interprétée de la sorte.

Dans une telle situation, la simulation “naturelle” de chaîne de Markov (à la base de la “méthode MCMC”) consisterait à choisir un état s_0 arbitraire (ou aléatoire, selon une loi quelconque), puis à tirer une longue séquence $(f_k)_{1 \leq k \leq n}$ de fonctions selon la loi μ , et de retourner $s_n = f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1(s_0)$. Si la chaîne est ergodique, la loi de s_n converge vers la loi stationnaire et, pour peu que n soit assez grand, on peut obtenir une bonne approximation de celle-ci. Il est bien entendu essentiel d’estimer correctement la vitesse de convergence, ou à tout le moins de majorer le nombre de pas de temps suffisant pour assurer la qualité de l’approximation ; généralement, chaque chaîne doit être étudiée par des méthodes *ad hoc*.

Le principe de l’algorithme de Propp et Wilson est, lorsqu’une chaîne de Markov est ainsi décrite au moyen de fonctions de changement d’état, de construire l’équivalent d’une chaîne ayant un passé infiniment long, et dont on peut se contenter d’observer l’état au temps 0 qui est distribué selon la loi stationnaire. Si le calcul peut être réalisé en un temps (moyen) fini, on obtient un (pseudo-)algorithme de simulation de la loi en question.

Considérons une suite doublement infinie $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de nos fonctions de mise à jour, indépendantes et toutes distribuées selon la loi de simulation μ . Posons, pour $s \leq t \in \mathbb{Z}$,

$$F_{s,t} = f_t \circ f_{t-1} \circ \dots \circ f_{s+1};$$

on obtient, pour tout “temps de départ” $s_0 \in \mathbb{Z}$ et tout état initial x_0 , une copie fidèle $(X_n^{s_0, x_0})_{n \geq 0}$ de la chaîne partant de l’état x_0 , en posant $X_n^{s_0, x_0} = F_{s_0, s_0+n}(x_0)$.

La simulation classique, “vers l’avant”, de la chaîne de Markov, correspond au cas où l’on prend $s_0 = 0$; la propriété d’ergodicité de la chaîne dit simplement que l’on a, pour tout état x et tout état initial x_0 ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n^{0, x_0} = x) = \pi(x),$$

où π est la distribution stationnaire. On peut donc calculer X_n^{0, x_0} pour n “assez grand”, fixé à l’avance, et on aura un élément de l’espace d’états qui sera “presque” tiré selon la distribution limite.

La simulation “depuis le passé” consiste à observer les valeurs, au temps 0, des copies de la chaîne parties de plus en plus loin dans le passé, à savoir $X_0^{-n, x_0} = F_{-n, 0}(x_0)$. Notons tout de suite que cela implique cette simulation n’est pas naturelle : alors que passer de X_n^{0, x_0} à X_{n+1}^{0, x_0} est “facile” (il suffit d’appliquer f_{n+1}), la connaissance de X_0^{-n, x_0} ne permet *a priori* pas de calculer facilement X_0^{-n-1, x_0} .

La première constatation est que la loi de X_0^{-n, x_0} est la même que celle de X_n^{0, x_0} : les deux sont l’image de x_0 par la composée de n fonctions de mise à jour aléatoires. En fait, pour être un peu plus précis, $F_{-n, 0}$ a la même loi que $F_{0, n}$ (la loi de la composée de n fonctions indépendantes de même loi μ).

Ajoutons un ingrédient, et supposons que \mathcal{F} est tel qu’il soit possible, en composant des fonctions de \mathcal{F} (toutes de probabilités strictement positives), d’obtenir des fonctions constantes. Alors, puisqu’en composant des fonctions dont au moins une est constante on obtient une fonction constantes, il est clair qu’en composant suffisamment de fonctions de loi μ , on finira, avec probabilité 1 et en un nombre moyen fini de compositions, par obtenir une fonction constantes : si composer N fonctions a probabilité $\epsilon > 0$ de donner une fonction constante, la probabilité de ne pas obtenir une fonction constante en composant kN fonctions est d’au plus $(1 - \epsilon)^k$, et le nombre de fonctions à composer avant d’obtenir une constante est dominé stochastiquement par N fois une variable aléatoire géométrique de paramètre ϵ .

On peut alors définir, presque sûrement, une variable aléatoire

$$T = \inf\{n : F_{-n, 0} \text{ est une fonction constante}\} \quad (4.2)$$

et, pour les besoins du raisonnement seulement, une autre, qui est ici un temps d’arrêt classique,

$$T' = \inf\{n : F_{0, n} \text{ est une fonction constante}\}. \quad (4.3)$$

Le raisonnement précédent implique que T et T' sont toutes deux définies avec probabilité 1, et ont une espérance finie; et même, qu'elles ont même loi.

L'algorithme de Propp et Wilson repose sur la remarque que *l'unique valeur prise par $F_{-T,0}$ est distribuée selon la loi stationnaire de la chaîne de Markov*. La même chose n'est *a priori* pas vraie de $F_{0,T}$.

En effet, la différence est que, si f est une fonction constante, *précomposer* f par g laisse la même fonction constante, alors que *postcomposer* f par g donnera *a priori* une fonction constante différente : $f \circ g = f$ mais $g \circ f$ n'a aucune raison d'être égale à f . Par conséquent, la suite $(F_{-n,0}(s_0))_{n \geq 0}$ est, avec probabilité 1, ultimement constante (avec une valeur qui ne dépend pas de s_0), alors que la suite $(F_{0,n}(s_0))_{n \geq 0}$, qui n'est rien d'autre qu'une réalisation de la chaîne de Markov étudiée, n'a aucune raison de l'être.

Le raisonnement est donc, *in fine*, un argument de convergence monotone : si l'on définit les événements

$$\begin{aligned} A_n &= \{T \leq n\} \\ B_{n,s} &= \{F_{-n,0}(s_0) = s\} \\ C_{n,s} &= A_n \cap B_{n,s} = \{T \leq n \text{ et } F_{-T,0}(s_0) = s\}, \end{aligned}$$

la suite (A_n) croît vers l'événement $\{T < \infty\}$, qui a probabilité 1, l'événement $B_{n,s}$ a une probabilité qui tend vers $\pi(s)$ par ergodicité, et la suite $(C_{n,s})_{n \geq 0}$ est une suite croissante d'événements dont les probabilités croissent vers une limite $\pi'(s)$ qui est au plus égale à $\pi(s)$. Comme on a

$$\bigcup_{s \in S} C_{n,s} = A_n,$$

la somme des probabilités limites doit être égale à 1, ce qui implique que l'on ait $\pi'(s) = \pi(s)$.

Cet argument de convergence monotone fait défaut dans le cas de la simulation "vers l'avant", et il n'est pas difficile d'exhiber des exemples où $F_{0,T}(s_0)$ n'est *pas* distribué selon la loi limite de la chaîne de Markov.

Dans la pratique, la simulation "à l'envers" de la chaîne de Markov peut se faire en doublant d'une fois sur l'autre le nombre de pas simulés puisque le résultat ne change pas si l'on remonte "trop loin" dans le passé. Il est normalement nécessaire de stocker toutes les fonctions de mise à jour, ce qui impose, dans les applications, qu'elles puissent être décrites de manière économe; Wilson donne dans [76] une variante "à lecture unique", qui s'affranchit de cette contrainte en ajoutant une hypothèse qui, dans de très nombreuses applications, est satisfaite.

Le problème de la *détection* du fait que la composée de fonctions de mise à jour est constante reste *a priori* non trivial. Dans la grande majorité des cas, il n'est tout simplement pas envisageable de calculer les images de tous les états, ceux-ci étant trop nombreux pour qu'on puisse réalistement les passer un à un en revue. Dans les applications, on cherche en général à obtenir un algorithme de complexité en temps polynomiale (de préférence avec un degré raisonnable) en la taille des objets, ceux-ci étant fréquemment en nombre exponentiel en cette taille (c'est le cas des deux types d'applications que nous avons en tête, à savoir, des familles de FPL ou de partitions planes). La variante *monotone* de l'algorithme de CFTP est un cas où cette détection est grandement facilitée.

4.2.2 CFTP monotone sur un treillis distributif fini

Il existe un cas où le problème de la détection de la coalescence est grandement facilité : c'est celui où l'espace d'états de la chaîne de Markov est un ensemble partiellement ordonné, avec peu d'éléments minimaux et maximaux, et où les fonctions de mise à jour qui réalisent la chaîne sont *croissantes*. En effet, la composée de fonctions de mise à jour sera automatiquement une fonction croissante, et sera constante si et seulement si les éléments minimaux et maximaux ont tous la même image; on se ramène

donc à composer les fonctions point par point, *i.e.* à simuler (au moyen des mêmes fonctions de mise à jour) des chaînes dont les états initiaux sont les éléments minimaux et maximaux de l'espace d'états.

Dans le cas où cet espace est un treillis distributif, la situation est optimale de ce point de vue : il n'existe qu'un seul élément minimal et un seul élément maximal. De plus, au moins lorsque la distribution ciblée est la distribution uniforme, on peut donner une construction standard d'une chaîne de Markov simulable par fonctions de mise à jour croissantes.

Considérons un ensemble fini partiellement ordonné (P, \leq) , et le treillis $J(P)$ de ses idéaux. Il est facile de définir une chaîne de Markov dont l'espace d'états est $J(P)$, et dont l'unique distribution stationnaire est la distribution uniforme, au moyen des fonctions d'"ajout conditionnel" et de "suppression conditionnelle" d'éléments, T_x^+ et T_x^- , respectivement :

$$T_x^+(I) = \begin{cases} I \cup \{x\} & \text{si } I \cup \{x\} \in J(P) \\ I & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$T_x^-(I) = \begin{cases} I - \{x\} & \text{si } I - \{x\} \in J(P) \\ I & \text{sinon,} \end{cases}$$

En d'autres termes, T_x^+ et T_x^- tentent respectivement d'ajouter et de retrancher l'élément x à leur argument ; si le résultat n'est pas un idéal, rien ne change. L'ajout de x a lieu uniquement si x est un élément minimal du complémentaire de I , et le retrait de x , si x est un élément maximal de I . Par conséquent, on a

$$T_x^+(I) = J \iff T_x^-(J) = I.$$

Par conséquent, n'importe quelle chaîne de Markov dont un pas de temps consiste à choisir l'une des transformations T_x^+ ou T_x^- selon une distribution de probabilités fixe (les différents pas étant indépendants) laisse stationnaire la distribution uniforme, dès lors que, pour chaque x , T_x^+ et T_x^- ont la même probabilité ; ou, de manière équivalente, la probabilité porte sur le choix d'un $x \in P$ et le signe est choisi uniformément et indépendamment de x : les probabilités de transition sont en effet symétriques, $p_{I,J} = p_{J,I}$ et la distribution uniforme $\pi(I) = 1/|J(P)|$ satisfait la condition d'équilibre local

$$\pi(I)p_{I,J} = \pi(J)p_{J,I}$$

pour tous les idéaux I et J .

Comme il est par ailleurs évident qu'une telle chaîne est irréductible dès que la loi de probabilité choisie charge tous les éléments (on passe de n'importe quel idéal à l'idéal vide en retirant chaque élément dans un ordre décroissant, et de l'idéal vide à n'importe quel idéal en ajoutant les éléments dans un ordre croissant) et apériodique (essayer d'ajouter un élément déjà présent, ou de retirer un élément absent, laissera toujours l'idéal inchangé, de sorte que l'on a $p_{I,I} \geq 1/2$ pour tout idéal I), la chaîne de Markov est ergodique et, quelle que soit la distribution de l'état initial, converge vers la distribution uniforme.

Le même raisonnement s'applique si, au lieu de transformations de la forme T_x^\pm , on utilise des compositions de telles transformations, sous certaines conditions. La plus simple est de prendre des chaînes de l'ensemble partiellement ordonné, $C = (x_1 < x_2 < \dots < x_k)$, et de définir

$$T_C^+ = T_{x_1}^+ \circ T_{x_2}^+ \circ \dots \circ T_{x_k}^+$$

et

$$T_C^- = T_{x_k}^- \circ T_{x_{k-1}}^- \circ \dots \circ T_{x_1}^-$$

(l'ordre de composition est ici choisi de manière à assurer que $T_C^\pm(I)$ diffère de I par au plus un élément ; si les x_i ne se couvrent pas les uns les autres, l'ordre devient sans importance). C'est ce qui est fait classiquement pour les FPL ou les partitions planes, où, au lieu de chercher à ajouter ou retrancher un élément de l'ensemble partiellement ordonné, on choisit une case du FPL ou un hexagone de côté 1 du pavage, que l'on cherche à "inverser" si possible. Ainsi, pour les FPL, une "règle locale" de la forme

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} & \mapsto & \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \\ \text{(autre chose)} & \mapsto & \text{(inchangé)} \end{array}$$

est, selon la parité de la position, de la forme $T_{C_{i,j}}^+$ ou $T_{C_{i,j}}^-$ où $C_{i,j}$ est la chaîne formée de tous les éléments de la forme (i, j, k) ; et, pour les partitions planes, une règle locale de la forme

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \diagup \\ \square \\ \diagdown \end{array} & \mapsto & \begin{array}{c} \square \\ \diagup \\ \diagdown \end{array} \\ \text{(autre chose)} & \mapsto & \text{(inchangé)} \end{array}$$

est de la forme $T_{C_{a,b}}^+$, où

$$C_{a,b} = \{(i, j, k) \in [[1, N]]^3 : j - i = a, k - j = b\}$$

est une chaîne formée de tous les éléments qui se projettent au même endroit de l'hexagone.

Jusqu'ici, tout est parfaitement classique, et le fait qu'effectuer des mises à jour locales de configurations (pavages ou autres) permette de converger vers une distribution uniforme, est connu et utilisé depuis longtemps. Estimer ou majorer le "temps" (en nombre de pas de la chaîne de Markov obtenue) nécessaire pour s'approcher de la distribution limite est en général un problème difficile, et chaque situation a tendance à demander une preuve *ad hoc*.

4.2.3 Sym-CFTP : génération aléatoire d'idéaux symétriques

Plaçons-nous maintenant dans le cas où nous avons toujours un ensemble partiellement ordonné (P, \leq) , mais où nous souhaitons générer aléatoirement non pas un idéal de P , mais un idéal G -symétrique, ou quasi- G -symétrique, pour un certain groupe de bijections monotones sur P .

Pour que le problème ne soit pas immédiatement traitable par l'algorithme de CFTP monotone, il faut que G ne soit pas uniquement composé d'automorphismes (croissants) de P : en effet, si c'était le cas, les idéaux G -symétriques seraient essentiellement tous les idéaux de P quotienté par l'action du groupe G , et on pourrait appliquer l'algorithme de CFTP monotone directement. En termes des idéaux de P , cela reviendrait à utiliser, comme fonctions de mise à jour, les fonctions

$$T_x^{\epsilon} = \prod_{g \in G} T_x^{\epsilon}$$

qui envoient bien les idéaux G -symétriques sur des idéaux G -symétriques.

Supposons maintenant que $G = G^+ \cup G^-$, où G^+ est le sous-groupe de G formé des seuls automorphismes (croissants) de P , et G^- , supposé non vide, contient les bijections décroissantes.

Pour chaque élément x de P , plusieurs situations peuvent se présenter :

- soit il existe $g \in G^-$ tel que $g(x) = x$, auquel cas x fait partie des éléments "critiques" dont nous avons convenu d'exclure l'ensemble de l'orbite des idéaux quasi-symétriques;
- soit il existe $g \in G^-$ tel que $g(x)$ et x soient comparables : alors x peut être qualifié d'élément "haut" ou "bas" selon que l'on a $x > g(x)$ ou $x < g(x)$; tous les éléments "bas" doivent être inclus dans chaque idéal (quasi-)symétrique, et tous les éléments "hauts" en sont exclus;
- soit x n'est comparable à aucun autre élément de $G(x)$ (en particulier, il est impossible que l'on ait $x < g(x)$ avec $g \in G^+$, car cela impliquerait l'existence d'une chaîne infinie $x < g(x) < g(g(x)) \dots$); de tels éléments "médiants" composent la partie variable des idéaux (quasi-)symétriques.

Dans les différents cas, nous pouvons définir des fonctions T_x^{\pm} , de $J(P)$ dans lui-même, qui transforment toujours un idéal (quasi-)symétrique en idéal (quasi-)symétrique :

- si x est critique, on pose

$$T_x^+ = T_x^- = \prod_{g \in G} T_{g(x)}^-;$$

- si x est "bas", on pose

$$T_x^+ = T_x^- = \prod_{g \in G^+} T_{g(x)}^+ \circ \prod_{g \in G^-} T_{g(x)}^-;$$

inversement, si x est “haut”,

$$T_x'^+ = T_x'^- = \prod_{g \in G^+} T_{g(x)}^- \circ \prod_{g \in G^-} T_{g(x)}^+;$$

– si x est “médian”,

$$\begin{aligned} T_x'^+ &= \prod_{g \in G^+} T_{g(x)}^+ \circ \prod_{g \in G^-} T_{g(x)}^- \\ T_x'^- &= \prod_{g \in G^+} T_{g(x)}^- \circ \prod_{g \in G^-} T_{g(x)}^+. \end{aligned}$$

Ainsi, si x est un élément critique, on retire de l'idéal tous les éléments de l'orbite de x qui peuvent l'être; si x est un élément haut ou bas, on retire de l'idéal tous les éléments hauts de l'orbite de x qui peuvent l'être, et on ajoute tous les éléments bas qui peuvent l'être; et si x est médian, on cherche à ajouter ou retirer x et les éléments de $G^+(x)$, et à faire l'opération inverse sur les éléments de $G^-(x)$. Dans chaque cas, l'ordre de composition n'est pas important, car les fonctions composées commutent entre elles. Notons que, si x n'est pas médian et que I est G -symétrique, alors $T_x'^{\pm}(I) = I$; et, si x est médian, et I G -symétrique, $T_x'^+(I)$ est égal soit à I , soit à $I - G^-(x) \cup G^+(x)$, et $T_x'^-(I)$ est égal soit à I , soit à $I - G^+(x) \cup G^-(x)$.

Au moyen de ces nouvelles fonctions de mise à jour $T_x'^{\pm}$, nous pouvons définir une nouvelle chaîne de Markov sur $J(P)$, exactement comme précédemment, en utilisant les $T_x'^{\pm}$ au lieu des T_x^{\pm} . Cette chaîne n'est pas ergodique sur $J(P)$, puisque $J_G(P)$ en est un ensemble absorbant (l'image d'un idéal symétrique est symétrique). En revanche, nous conservons deux propriétés qui garantissent que faire tourner l'algorithme de CFTP, en utilisant les $T_x'^{\pm}$ au lieu des T_x^{\pm} , donnera bien un élément aléatoire uniforme de $J_G(P)$ en temps moyen fini :

Lemme 4.1. *Si I et I' sont deux idéaux (quasi-) G -symétriques, et si x est un élément médian, alors*

$$T_x'^{\epsilon}(I) = I' \iff T_x'^{-\epsilon}(I') = I.$$

Lemme 4.2. *Soient x_1, x_2, \dots, x_k les éléments bas de P , dans un ordre compatible avec l'ordre \leq (i.e., si $x_i \leq x_j$ alors $i \leq j$), y_1, \dots, y_ℓ les éléments critiques de P dans un ordre quelconque, et z_1, \dots, z_m une suite (de longueur maximale) d'éléments médians telle que, pour tout i , z_i est minimal parmi les éléments médians qui ne soient pas de la forme $g(z_j)$ avec $g \in G$ et $j < i$.*

Alors

$$F = T_{z_m}^{\prime+} \circ T_{z_{m-1}}^{\prime+} \circ \dots \circ T_{z_1}^{\prime+} \circ T_{y_\ell}^{\prime+} \circ \dots \circ T_{y_1}^{\prime+} \circ T_{x_k}^{\prime+} \circ \dots \circ T_{x_1}^{\prime+}$$

est constante sur $J(P)$, i.e. $F(\emptyset) = F(P)$, et $F(\emptyset) \in J_G(P)$.

Démonstration. On vérifie aisément, par récurrence, qu'en appliquant $T_{x_1}^{\prime+}, \dots, T_{x_k}^{\prime+}$, dans cet ordre, à \emptyset (respectivement, à P), on obtient un idéal qui contient tous les éléments x_1, \dots, x_k (respectivement, qui ne contient aucun des éléments de la forme $g(x_1), \dots, g(x_k)$ pour $g \in G^-$). Puis, en appliquant $T_{y_1}^{\prime+}, \dots, T_{y_\ell}^{\prime+}$ dans n'importe quel ordre, on fait disparaître les éléments critiques de l'image de P . Enfin, en appliquant $T_{z_1}^{\prime+}, \dots, T_{z_j}^{\prime+}$ dans cet ordre, on fait apparaître les $g(z_1), \dots, g(z_j)$ (pour $g \in G^+$) dans l'image de \emptyset , et disparaître les $g(z_1), \dots, g(z_j)$ (pour $g \in G^-$) de l'image de P .

Par conséquent, $F(\emptyset)$ contient tous les éléments bas, et tous les éléments de la forme $g(z_i)$ avec $g \in G^+$. Inversement, $F(P)$ ne contient aucun élément haut ni aucun élément critique, ni aucun élément $g(z_i)$ pour $g \in G^-$. Comme tout élément médian est de la forme $g(z_i)$ avec $g \in G^+$ ou $g \in G^-$, tout élément médian est dans $F(\emptyset)$ ou exclus de $F(P)$. Par ailleurs, F est une fonction croissante sur $J(P)$, donc $F(\emptyset) \subset F(P)$, ce qui prouve que l'on a $F(\emptyset) = F(P)$ et F est par conséquent constante sur $J(P)$.

De plus, $F(\emptyset)$ contient exactement les éléments bas et les éléments médians de la forme $g(z_j)$ avec $g \in G^+$, et pour tout $g' \in G^-$, $g'(F(\emptyset))$ contient exactement les éléments hauts et les médians de la forme $g(z_j)$ avec $g \in G^-$; $F(\emptyset)$ est donc bien, aux éléments critiques près, le complémentaire de son image par g' , c'est-à-dire que l'on a bien $F(\emptyset) \in J_G(P)$. ■

Le Lemme 4.1 nous assure que la chaîne de Markov définie par les T_x^\pm a, sur $J_G(P)$, une matrice de probabilités de transition qui est symétrique, et donc qu'elle a la distribution uniforme comme distribution stationnaire. Le Lemme 4.2, de son côté, assure à la fois l'irréductibilité et le fait que composer suffisamment de fonctions de mise à jour aléatoires (de la forme T_x^\pm) donnera, avec probabilité 1, une fonction constante. Par conséquent, l'algorithme de CFTP "symétrisé" (qui fonctionne exactement comme le CFTP classique, mais en utilisant les T_x^\pm au lieu des T_x^\pm comme fonctions de mise à jour) produit un élément aléatoire uniforme de $J_G(P)$ en temps moyen fini.

	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 60$
Aucune symétrie	11908±4197	289741±69692	$5.9 \cdot 10^6 \pm 1.1 \cdot 10^6$	$3.4 \cdot 10^7 \pm 8.1 \cdot 10^6$
Diagonale	6528±2808	144917±51115	$2.8 \cdot 10^6 \pm 7.1 \cdot 10^5$	$1.6 \cdot 10^7 \pm 4.0 \cdot 10^6$
Double diag.	3481±1561	71557±25490	$1.4 \cdot 10^6 \pm 3.6 \cdot 10^5$	$7.6 \cdot 10^6 \pm 1.2 \cdot 10^6$
Verticale	1201±582	34881±12312	$8.2 \cdot 10^5 \pm 2.2 \cdot 10^5$	$5.2 \cdot 10^6 \pm 1.4 \cdot 10^6$
Vert. & horiz.	159±113	6507±2815	$1.7 \cdot 10^5 \pm 5.8 \cdot 10^4$	$1.0 \cdot 10^6 \pm 2.7 \cdot 10^5$
Demi tour	5546±2403	127685±37860	$2.7 \cdot 10^6 \pm 6.5 \cdot 10^5$	$1.5 \cdot 10^7 \pm 3.4 \cdot 10^6$
Quart de tour	1054±545	28938±11567	$7.1 \cdot 10^5 \pm 2.0 \cdot 10^5$	$4.3 \cdot 10^6 \pm 1.1 \cdot 10^6$
Symétrie totale	91±69	3385±1810	$8.1 \cdot 10^4 \pm 2.8 \cdot 10^4$	$4.7 \cdot 10^5 \pm 1.5 \cdot 10^5$

TAB. 4.1 – Temps de coalescence observés (moyenne et écart-type)

Cet algorithme de CFTP symétrisé a été utilisé de manière systématique pour engendrer les ASM de différentes classes de symétrie présentées Figure 4.2, ainsi que le QTFPL de la Figure 4.3 dont la génération a pris une quinzaine de minutes sur une machine peu récente. Les valeurs moyennes du nombre T de pas de temps nécessaires à obtenir la coalescence sont indiquées Table 4.1. Expérimentalement, et sur ce petit nombre d'exemples, il semble que la coalescence ait tendance à être plus rapide sur les versions symétrisées (ce qui n'est pas forcément une surprise : les idéaux symétriques sont en général beaucoup moins nombreux, et les fonctions de mise à jour symétrisées sont des composées d'un nombre de fonctions de mise à jour "simples" en nombre égal à l'ordre du groupe de symétries). Il serait intéressant de chercher à déterminer s'il s'agit d'un cas général, ou si cela est dû à la structure particulière des ensembles partiellement ordonnés étudiés.

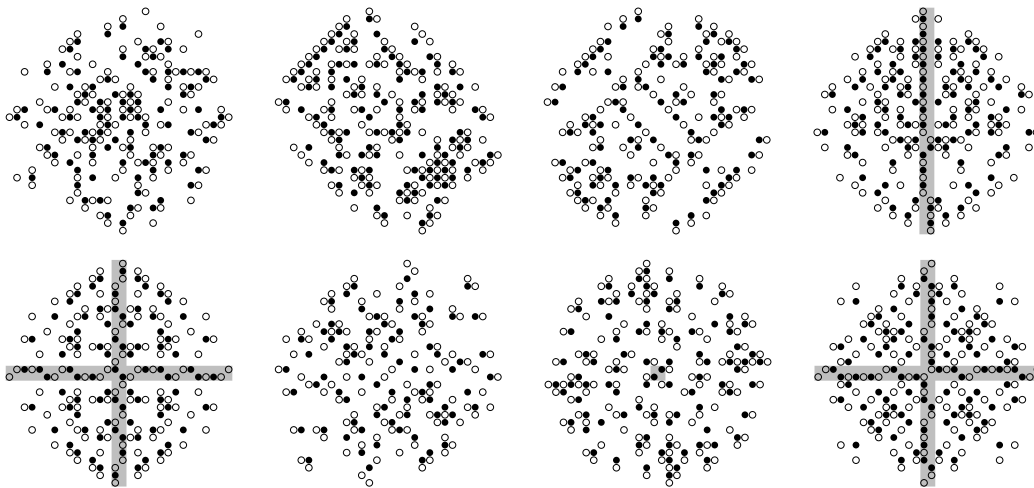


FIG. 4.2 – ASMs aléatoires de taille 30

À vrai dire, parmi les classes de symétrie dont la définition fait intervenir des bijections décroissantes, seule celles des QTASM ne peut pas être simplement décrite comme un ensemble ordonné par l'inclusion; pour les autres classes, comme par exemple les VASM, les éléments hauts et bas de l'ensemble partiellement ordonné "coupent" l'ensemble des éléments médians en deux parties séparées (ou plus) : le

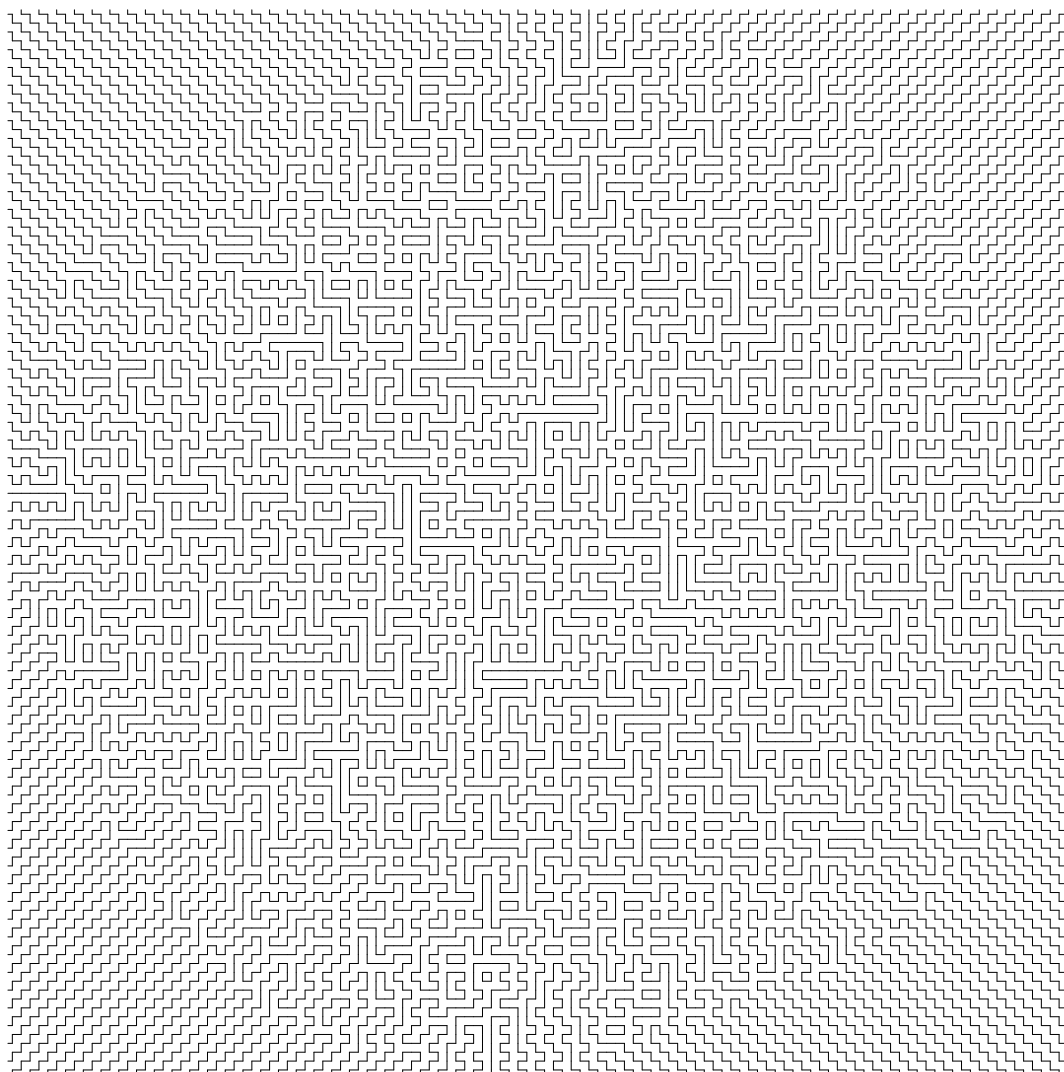


FIG. 4.3 – Un QTFPL aléatoire uniforme de taille 120

diagramme de Hasse de l'ensemble des éléments médians n'est pas connexe, et les VASM correspondent aux idéaux du sous-ensemble formé de l'une des composantes connexes.

Les mêmes idées pourraient être adaptées au cas des partitions planes symétriques, mais cela n'a pas été fait à l'heure actuelle, ce qui m'empêche d'inclure des images de telles partitions planes aléatoires. Comme pour les ASM, seules les CSSCPP (partitions planes cycliquement symétriques auto-complémentaires, ou pavages de l'hexagone invariants par rotation d'un sixième de tour) ne peuvent pas se ramener à un ensemble partiellement ordonné par une transformation simple.

4.3 Exploration d'ensembles $\mathcal{A}(N; p)$

Nous avons vu au Chapitre 3 un certain nombre de conjectures qui, ultimement, portent sur le nombre de FPL d'une classe de symétrie donnée et ayant un couplage donné. Afin de valider, pour de petites tailles, de telles conjectures, il est indispensable de parcourir l'ensemble de tous les FPL d'une taille et d'une classe de symétrie données, ce qui peut être fait assez simplement (par exemple, dans l'ordre lexicographique des matrices de hauteurs).

Toutefois, la méthode atteint rapidement ses limites, car les suites énumérant les FPL croissent très rapidement. Or, si pour certaines familles de couplages le nombre de FPL croît presque aussi vite que le nombre total, il existe d'autres familles de couplages pour lesquelles cette croissance est beaucoup plus lente. On pourrait donc envisager de pousser plus loin la vérification (partielle) des différentes conjectures, pour peu que l'on soit capable de parcourir non pas l'ensemble de tous les FPL d'une taille donnée, mais, de manière plus restrictive, celui de tous les FPL ayant un couplage donné - d'une manière plus rapide qu'en engendrant exhaustivement tous les FPL de la bonne taille et en "filtrant" ceux qui ont le couplage voulu.

Une façon standard d'accomplir une telle tâche consiste à définir un graphe dont les FPL recherchés constituent les sommets, deux FPL étant voisins s'il est possible de passer de l'un à l'autre par une transformation simple. L'exploration de l'ensemble se ramène alors à un algorithme de parcours de graphe. Si l'on met de côté les problèmes de mémoire, trois conditions doivent être remplies :

- on doit être capable, pour chaque couplage, de produire un point de départ pour l'algorithme de parcours, *i.e.*, étant donné un couplage, construire un FPL ayant ce couplage ;
- il doit être raisonnablement simple, étant donné un FPL, de déterminer l'ensemble de ses voisins dans le graphe ;
- enfin, le graphe doit être connexe (ou, si ce n'est pas le cas, on doit être capable d'exhiber un FPL de chaque composante connexe).

Le premier problème est en apparence simple, et nous verrons au paragraphe suivant un algorithme (limité aux FPL sans symétries imposées et aux classes d'invariance par rotations) qui, s'il n'est pas extrêmement efficace, a au moins le mérite d'exister et d'avoir une complexité polynomiale (à notre connaissance, personne n'avait encore pris la peine de prouver que des FPL existaient pour chaque couplage possible). La question de construire un graphe connexe raisonnable sur les ensembles du type $\mathcal{A}(N; p)$ reste ouverte, et en particulier la question de savoir si des transformations locales raisonnables donnent un graphe connexe n'est pas tranchée dans le cas général ; nous verrons une réponse très partielle au paragraphe 4.3.2.

4.3.1 Construction de FPL ayant un couplage donné

Le problème de la construction d'un FPL ayant un couplage donné est assez frustrant. Avec un peu d'habitude, il semble facile à résoudre sur des exemples, mais il n'est pas aussi simple de décrire un algorithme dont on soit sûr qu'il y parvienne à tout coup. La construction qui suit utilise la gyration de Wieland, et ne fonctionne donc que pour les classes de symétrie qui sont conservées par cette transformation (FPL, HTFPL, et QTFPL de taille multiple de 4).

Considérons tout d'abord le cas où le couplage recherché, écrit sous la forme d'un mot de Dyck, est de la forme $w = aw'b$ où w' est un mot de Dyck, *i.e.*, on veut un chemin reliant le sommet A_1 (de

coordonnées $(1, 0)$ au sommet A_{2N} (de coordonnées $(0, 2)$). Une façon simple d'obtenir un tel chemin est de le faire au plus court, ce qui revient à placer un coefficient 1 dans le coin supérieur gauche de la matrice à signes alternants correspondante. Ceci force à 0 tous les autres coefficients de la première ligne et de la première colonne de la matrice. Dit de manière équivalente sur le FPL, cela force la présence des arêtes indiquées Figure 4.4. Par ailleurs, la sous-matrice inférieure droite $(m_{i,j})_{2 \leq i, j \leq N}$ est contrainte à être également une matrice à signes alternants, et les arêtes fixées sont compatibles avec celles d'un FPL standard.

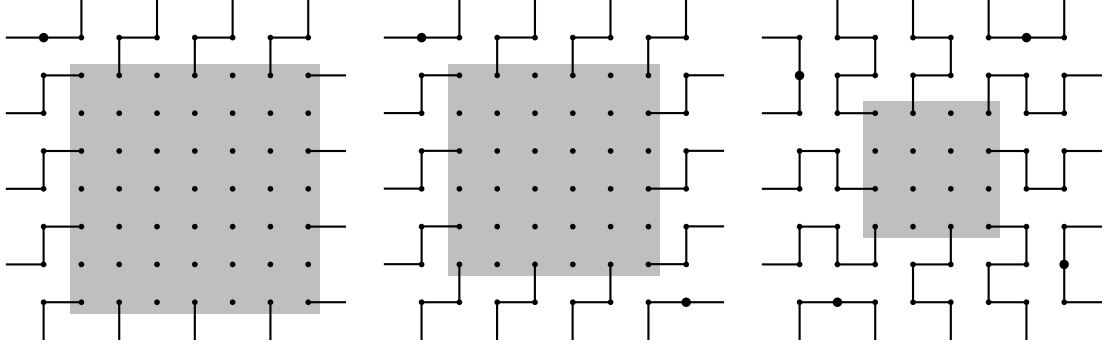


FIG. 4.4 – Arêtes fixées : les cas des FPL, des HTFPL et des QTFPL

On constate que le FPL complet aura comme couplage $aw'b$, si et seulement si le FPL défini par la sous-matrice inférieure droite a pour couplage w' .

Si le couplage w n'apparie pas les sommets A_1 et A_{2N} , il suffit d'utiliser la bijection de Wieland pour le faire tourner.

Au total, l'algorithme peut s'écrire de la façon suivante :

- 1: **Si** $w = ab$ **Alors**
- 2: Retourner la matrice (1)
- 3: **Sinon**
- 4: **Si** $w = aw'b$ où w' est un mot de Dyck **Alors**
- 5: Construire un ASM $M' = (m_{i,j})_{2 \leq i, j \leq N}$ de couplage w'
- 6: Poser $m_{i,1} = m_{1,i} = \delta_{i,1}$ et retourner la matrice $M' = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq N}$
- 7: **Sinon**
- 8: Construire un ASM M de couplage $R^{-1}(w)$
- 9: Retourner la matrice $W(M)$

Algorithme 4.1: Construction d'un ASM de couplage w donné

Au total, l'algorithme, pour engendrer une matrice de taille N , peut être amené à utiliser $O(N)$ fois la gyration W , ce qui garantit une complexité de $O(N^3)$.

La même technique peut être utilisée pour construire des HTASM présentant un couplage donné : si le couplage recherché relie les sommets A_1 et A_{2N} (et donc également les sommets A_N et A_{N+1} , soit un couplage de la forme $w = aw'abw'b$), on place un 1 dans les coins supérieurs gauche et inférieur droit de la matrice, ce qui diminue de 2 la taille de la matrice (de couplage $w'w'$) restant à construire en fixant les première et dernière ligne et colonne.

Le même principe fonctionne encore pour les (q)QTASM de taille paire $N = 2n$, à ceci près que, ne pouvant pas placer de 1 dans les coins de la matrice, on cherche un couplage reliant les sommets A_1 et A_2 (donc, de la forme $w = (abw')^4$, w' étant un mot de Dyck, au moins pour les tailles multiples de 4), auquel cas on fixe $m_{2,1} = 1$ (et donc $m_{N,2} = m_{N-1,N} = m_{1,N-1} = 1$), ce qui fixe les deux première et deux dernière lignes et colonnes et ramène le problème à la génération d'un (q)QTASM de taille diminuée de 4 dont le couplage serait w'^4 .

Cette construction, toutefois, ne peut fonctionner sur les classes de symétrie qui ne sont pas préservées par la gyration de Wieland (toutes celles qui restent).

4.3.2 Transformations locales et connexité

Venons-en maintenant à la question de définir une relation d'adjacence convenable sur l'ensemble $\mathcal{A}(N; p)$. Une proposition naturelle consiste à déclarer voisins deux FPL qui ne diffèrent que par une transformation locale de la forme (à rotations près)

$$\square \quad | \leftrightarrow | \quad \square$$

ou, de manière équivalente, si la différence symétrique entre les deux FPL, vus comme ensembles d'arêtes, consiste exactement en un cycle de longueur 6 et que l'arête qui constitue une corde de ce cycle appartient aux deux FPL (sans cette dernière condition, la transformation

$$\text{—} \quad | \leftrightarrow | \quad \text{—}$$

risque de modifier le couplage).

Clairement, deux FPL voisins au sens que nous venons de définir ont le même couplage, mais ils ont aussi le même nombre de boucles fermées ; on ne peut donc espérer que l'ensemble $\mathcal{A}(N, p)$ soit connexe pour cette relation d'adjacence, dès lors que tous les FPL qui le composent n'ont pas le même nombre de boucles fermées. Nous sommes donc naturellement amenés à ajouter des adjacences, et à déclarer également voisins deux FPL qui diffèrent exactement par un cycle de longueur 4, soit une transformation locale

$$| \quad | \leftrightarrow \text{—}$$

à condition qu'ils aient le même couplage, *i.e.* que, dans au moins l'un des deux FPL, l'une au moins des arêtes concernées appartienne à une boucle fermée.

Pour le premier type de transformation, nous parlerons d'*inversion de domino*, et pour le second, d'*inversion de carré*.

Il semble que ces deux types de transformations locales suffisent à permettre de passer de n'importe quel FPL à tout autre FPL de même couplage.

Conjecture 4.3. *Pour toute taille N et tout couplage p de $2N$ brins, l'ensemble $\mathcal{A}(N; p)$, muni de la relation d'adjacence définie par les inversions de dominos et de carrés, est connexe.*

Cette conjecture a déjà été démontrée pour certains couplages : Di Francesco, Zinn-Justin et Zuber [26] prouvent que, lorsque le couplage n'a que 3 paires "courtes" de la forme $\{i, i + 1\}$ (un tel couplage est forcément composé de 3 jeux d'arches imbriquées), les inversions de dominos suffisent à assurer la connexité (aucune boucle fermée n'est possible). Di Francesco et Zuber [27] posent la question, sans y répondre complètement, pour les couplages formés de 4 ensemble d'arches imbriquées (un sous-ensemble strict des couplages n'ayant que 4 paires "courtes"), pour lesquels ils prouvent qu'en plaçant le couplage correctement autour de la grille grâce au théorème de Wieland, aucune boucle fermée n'est encore possible.

Sans être capable de prouver la conjecture générale, nous pouvons montrer que la propriété de connexité est conservée par la rotation sur le couplage.

Théorème 4.1. *Pour tout couplage p de $2N$ brins, l'ensemble $\mathcal{A}(N; p)$ est connexe si et seulement si $\mathcal{A}(N; R(p))$ l'est.*

Démonstration. Plutôt que de démontrer directement l'équivalence, on se contente de prouver l'implication ; la réciproque s'obtient en itérant $2N - 1$ fois l'implication, puisque $R^{-1}(p) = R^{2N-1}(p)$.

La preuve se ramène à une étude de cas, et utilise la bijection de Wieland. L'idée est de prendre deux FPL dans $\mathcal{A}(N; p)$, différant par une inversion de domino ou de carré, et de montrer que leurs images respectives par W peuvent être transformés l'une en l'autre par un petit nombre d'inversions.

Plus précisément, plutôt que de considérer l'effet de $W = H_0 \circ H_1$, nous nous contentons d'examiner l'effet de H_i , et nous montrons que, lorsque deux FPL f et f' diffèrent par une seule inversion, leurs images $H(f)$ et $H(f')$ diffèrent par au plus 4 inversions. Au total, la distance entre $W(f)$ et $W(f')$ sera donc d'au plus 16 fois la distance entre f et f' .

Commençons par le cas où f et f' diffèrent par une inversion de domino. Sans perte de généralité, on peut supposer que la situation est localement celle de la Figure 4.5, les points bleus indiquant les cases inversibles par H .

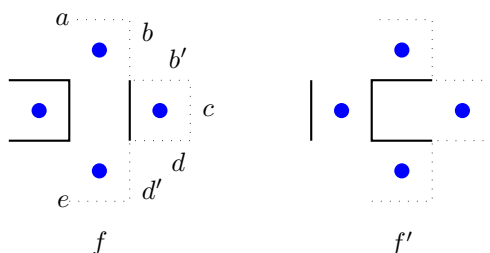


FIG. 4.5 – Configuration locale au voisinage d'une inversion de domino

La transformation H aura, sur f et f' , le même effet partout, sauf sur les 4 cases marquées d'un point; pour identifier cet effet, nous devons distinguer les cas selon celles des arêtes marquées a, b ou b', c, d ou d' , et e , qui appartiennent à f et f' . Au total, il existe 32 configurations locales possibles.

Cas 1 : b et d (ou, par symétrie, b' et d') sont occupées. Ceci correspond à 8 configurations, mais il s'avère que le statut des arêtes a et c n'intervient pas. Comme le montre la Figure 4.6, $H(f)$ et $H(f')$ diffèrent par une inversion de domino si l'arête e est présente, et par une inversion de carré sinon.

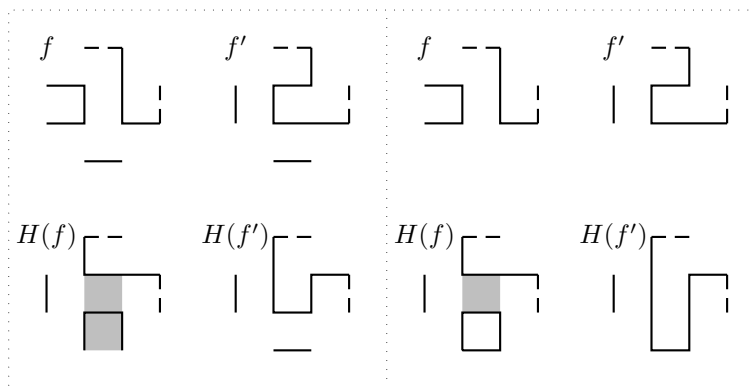


FIG. 4.6 – Premier cas de l'inversion de domino

Cas 2 : b et d' sont occupées. Comme au cas précédent, cela correspond à 8 configurations locales, et le statut des arêtes a et e n'intervient pas. Dans les deux sous-cas restants, $H(f)$ et $H(f')$ diffèrent par une inversion (de carré si l'arête c est présente, de domino sinon), comme indiqué Figure 4.7.

Cas 3 : b' et d sont occupées, ce qui correspond aux 8 configurations locales restantes. En tenant compte de la symétrie par rapport à un axe horizontal, et d'un cas où l'arête e ne joue pas, il reste 5 sous-cas : un se règle par une inversion de carré, trois par deux inversions successives, et le dernier par une séquence de 3 inversions. Tous sont présentés Figure 4.8.

Pour deux FPL qui diffèrent par une inversion de carré, il existe au départ deux possibilités : soit H agit sur les cases de même parité que le carré inversé, soit H agit sur les cases de parité différente. Dans la première situation, $H(f)$ et $H(f')$ diffèrent par la même inversion de carré; la seconde nécessite à nouveau une étude de cas.

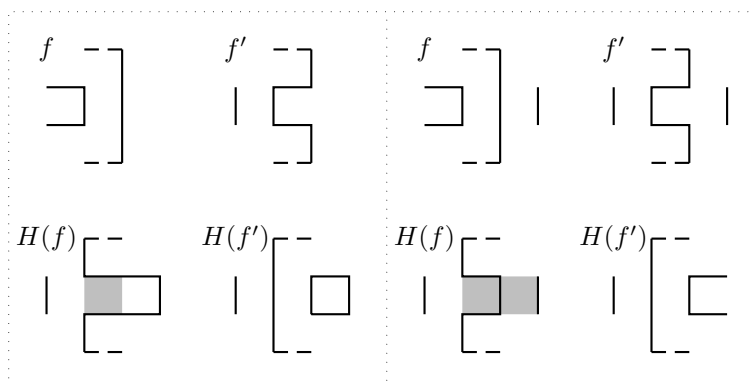


FIG. 4.7 – Deuxième cas de l'inversion de domino

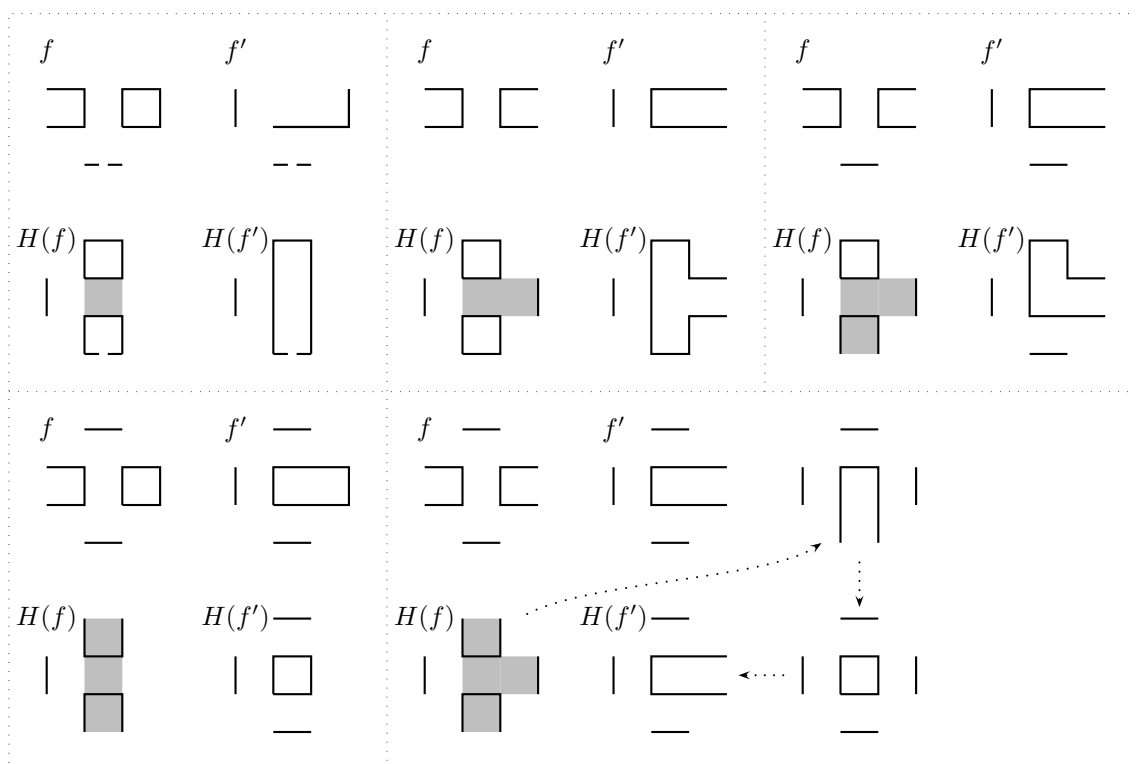


FIG. 4.8 – Troisième cas de l'inversion de domino

Comme indiqué Figure 4.9, nous devons distinguer selon le statut des 12 arêtes a , b ou b' , c , d ou d' , e , g ou g' , h , j ou j' , soit un total de 256 configurations locales avant de tenir compte des symétries.

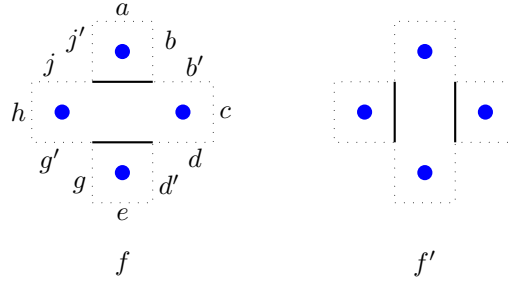


FIG. 4.9 – Voisinage d’une inversion de carré

- Cas 1** : “zero ou quatre arêtes verticales”, b' , d , g' et j (ou, par symétrie rotationnelle, b , d' , g et j') sont occupées. Ce cas correspond à 16 configurations, ramenées à 8 par les symétries horizontale et verticale. Parmi ces 8 sous-cas, 3 nécessitent une séquence de 3 inversions, la dernière en demandant 4; tous sont indiqués Figure 4.10.
- Cas 2** : “une ou trois arêtes verticales”, les arêtes b , d , g' et j (ou 7 autres possibilités équivalentes via rotations et symétries) sont occupées. Le statut des arêtes a et c ne joue pas, et les 16 configurations locales possible se ramènent à 4. Toutes se résolvent par une ou deux inversions, et sont indiquées Figure 4.11.
- Cas 3** : “deux arêtes verticales voisines”, les arêtes b , d , g' et j' (ou 3 autres possibilités équivalentes par rotation) sont occupées. Le statut des arêtes c et h ne joue pas, et là encore 16 sous-cas se ramènent à 4, tous résolus en une ou deux inversions comme indiqué Figure 4.12.
- Cas 4** : “deux arêtes verticales opposées”, les arêtes b , d , g et j (ou 7 autres combinaisons équivalentes par rotations et symétries) sont occupées. Ici le statut des 4 arêtes restantes a , c , e et h ne joue pas, et les 16 sous-cas se ramènent à un seul qui est indiqué dans la dernière case de la Figure 4.12.

La preuve est presque complète : il reste à s’assurer que les inversions de dominos et de carrés qui permettent à chaque fois de passer de $H(f)$ à $H(f')$, ne risquent pas de se trouver hors de la grille. Pour cela, il suffit de remarquer qu’ils sont toujours situés à l’intérieur du cycle formé par la différence symétrique entre $H(f)$ et $H(f')$ (grisée sur les figures); étant donné que $H(f)$ et $H(f')$ partagent les mêmes conditions au bord de la grille, ces cases grisées sont forcément à l’intérieur de la grille et les inversions sont bien légitimes. ■

Si l’on y regarde de plus près, la preuve permet de démontrer un résultat très légèrement plus fort : la rotation sur les couplages conserve la connexité, non seulement de l’ensemble des FPL partageant un couplage, mais aussi de l’ensemble des FPL partageant un “couplage partiel” (en prenant la définition des couplages comme couplages parfaits sans croisements de $[[1, 2N]]$, un couplage partiel est simplement un couplage sans croisements du même ensemble); il suffit de redéfinir les inversions de carrés autorisées comme étant celles qui ne font pas sortir de l’ensemble des (anti-)FPL ayant le couplage partiel demandé, *i.e.* les arêtes bordant le carré à inverser appartiennent soit à la même boucle, soit à une boucle fermée et une boucle fixée par le couplage partiel, soit à deux boucles (fermées ou non) qui ne sont pas fixées par le couplage partiel).

Enfin, remarquons que les inversions de dominos, interprétées sur les matrices de hauteurs, correspondent à augmenter ou diminuer de 2 la hauteur de deux cases voisines; l’inversion de carré correspond, elle, à modifier de 2 la hauteur d’une unique case. Par conséquent, deux FPL qui sont adjacents pour les inversions de dominos ou de carrés sont comparables, et la relation d’adjacence est une relation de couverture dans l’ordre partiel induit sur $\mathcal{A}(N; p)$ par la restriction de l’ordre naturel sur $\mathcal{A}(N)$ (à condition d’interdire les inversions de dominos qui peuvent être accomplies comme deux inversions de carrés, *i.e.*

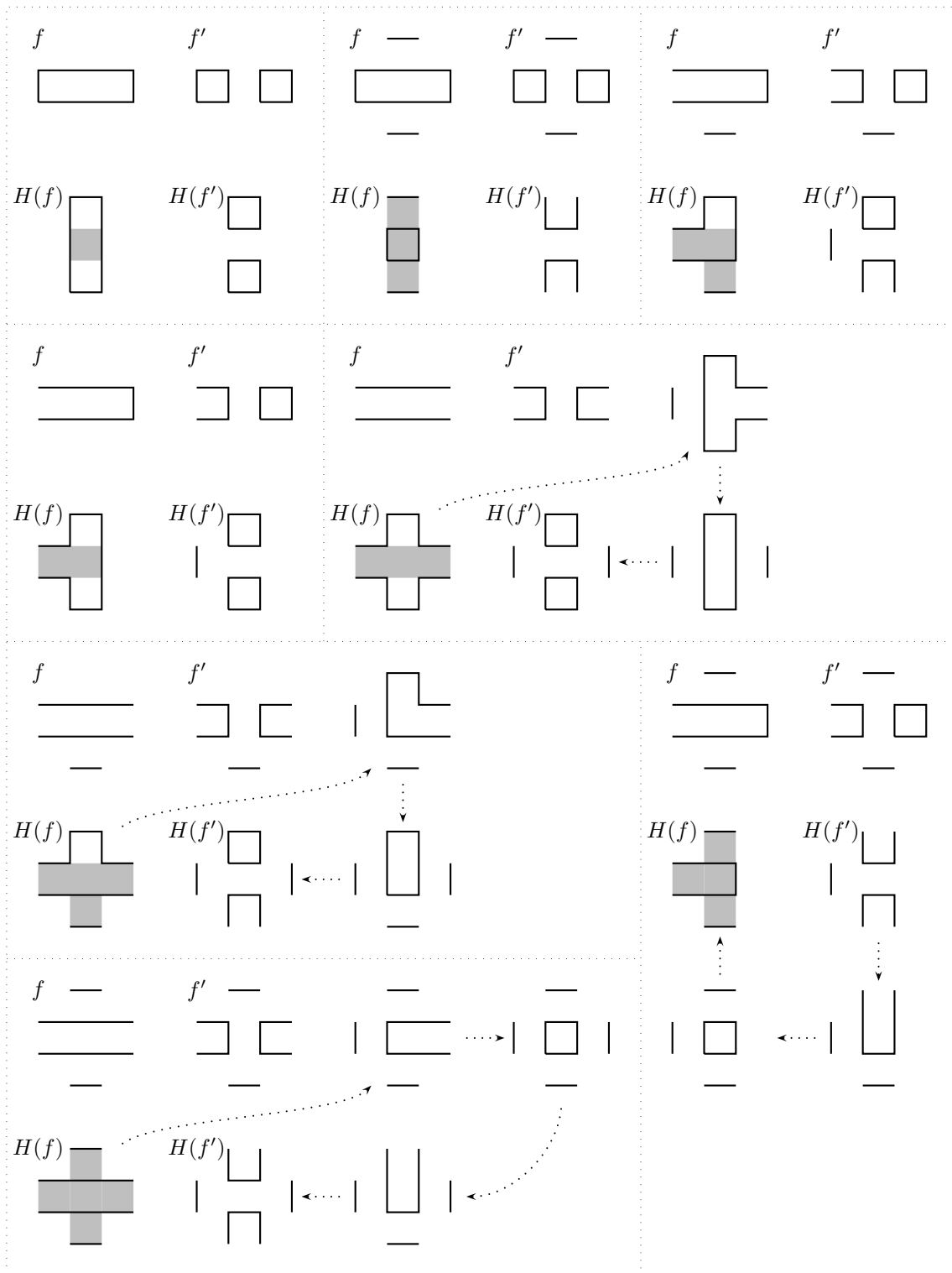


FIG. 4.10 – Premier cas de l'inversion de carré

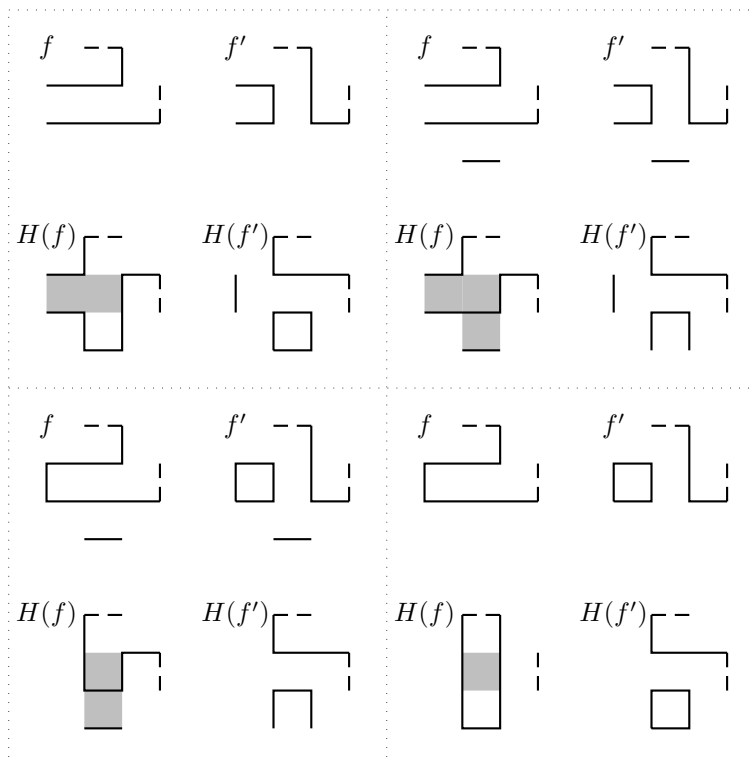


FIG. 4.11 – Deuxième cas de l'inversion de carré

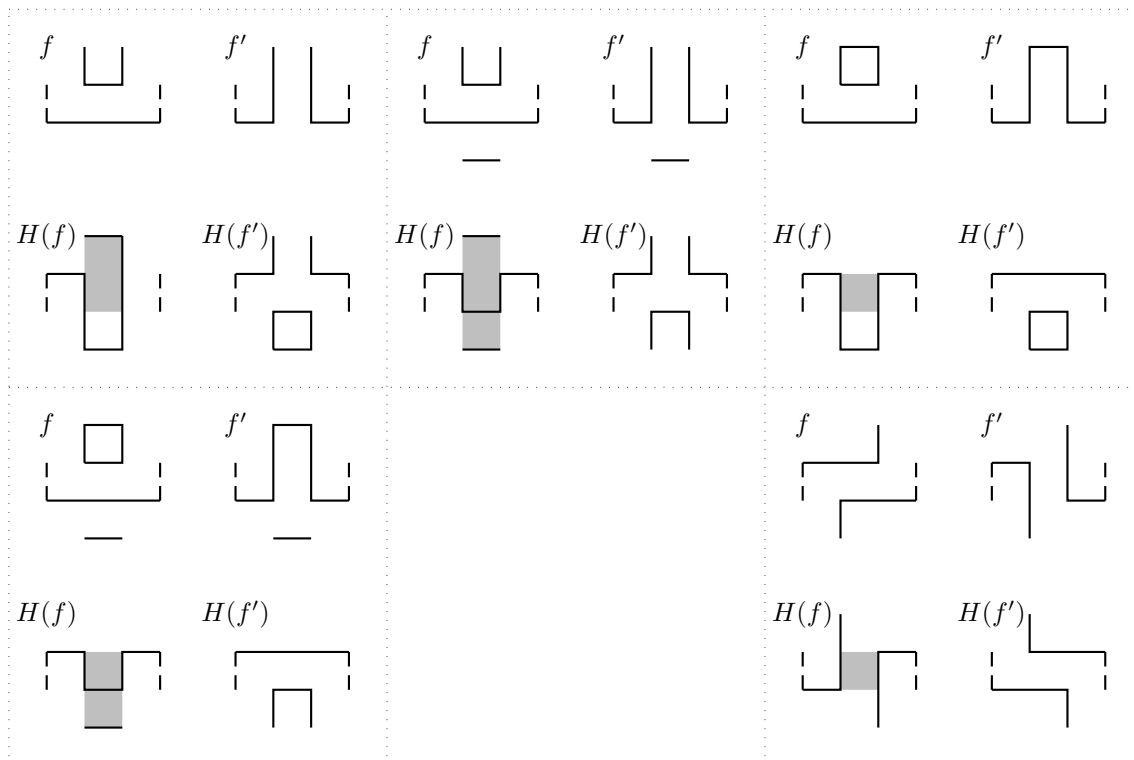


FIG. 4.12 – Troisième et quatrième cas de l'inversion de carré

lorsque les deux boucles impliquées dans l'inversion de domino n'en font qu'une ou que l'une au moins est une boucle fermée).

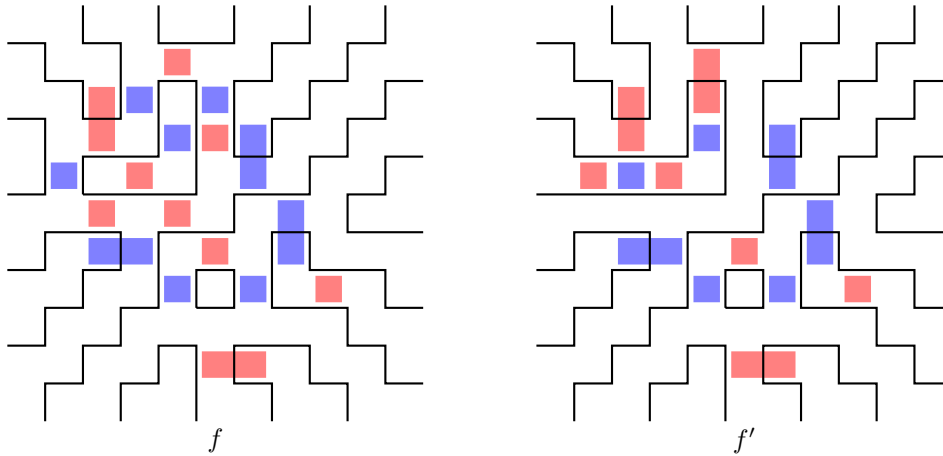


FIG. 4.13 – $\mathcal{A}(10; aababaabababbababb)$ n'est pas un treillis distributif

4.4 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre que la structure de treillis de l'ensemble des FPL d'une taille donnée, a des conséquences intéressantes non seulement sur la possibilité d'engendrer des FPL aléatoires d'assez grande taille (ce qui est maintenant classique), mais aussi pour la génération aléatoire de FPL présentant des conditions de symétrie arbitraire. Il serait intéressant d'étudier de manière systématique le temps de coalescence de l'algorithme SYM-CFTP, en particulier en le comparant à celui de l'algorithme travaillant sur les idéaux non symétriques : pour les cas que nous avons explicitement programmés, le nombre moyen de pas de la chaîne avant coalescence semble toujours être plus faible pour un groupe de symétries que pour chacun de ses sous-groupes. Il est possible qu'un tel phénomène ne soit pas général, et que la coalescence soit, pour certains ordres partiels, plus difficile à obtenir pour des idéaux très symétriques. Pour les classes de symétrie de FPL (ou de partitions planes), une telle situation semble peu vraisemblable au vu des résultats expérimentaux, mais une analyse précise serait la bienvenue.

On peut également s'interroger sur la structure de $\mathcal{A}(N; p)$ comme ensemble partiellement ordonné. A-t-il toujours un unique minimum et un unique maximum ? C'est le cas de tous les "petits exemples" que j'ai eu le courage de tester exhaustivement. En revanche, l'ordre n'est en général pas un treillis distributif. Pour s'en convaincre, il suffit d'exhiber un exemple de couple de FPL (f, f') tels que f' couvre f , mais que f soit couvert par strictement plus de FPL (autres que f') que f' – une telle situation est impossible dans un treillis distributif : chaque élément minimal du complémentaire d'un idéal, reste minimal dans le complémentaire si l'on ajoute un autre élément à l'idéal. Un tel exemple est donné Figure 4.13 ; les inversions correspondant à des mouvements vers le haut sont indiquées en bleu, celles correspondant à des mouvements vers le bas, en rose. On peut ainsi vérifier que f est couvert 9 fois (dont une par f'), alors que f' ne l'est que 7 fois.

Dans la même veine, il serait intéressant de pouvoir engendrer aléatoirement des FPL de couplage donné. Une preuve de la Conjecture 4.3 permettrait au moins de définir une chaîne de Markov simple à simuler, dont on aurait la certitude qu'elle converge vers la distribution uniforme. Il resterait alors à estimer avec suffisamment de précision la vitesse de cette convergence. Une définition de la chaîne par fonctions de mise à jour croissantes pourrait ouvrir la porte à une méthode de type CFTP. À l'heure actuelle, aucun des ingrédients d'une telle application de techniques standards n'est réuni.

Enfin, la possibilité d'explorer exhaustivement des ensembles $\mathcal{A}(N; p)$, pour des valeurs de N un peu plus grandes (quitte à prendre des couplages qui "contraignent" fortement les FPL), permettrait peut-être d'étudier plus précisément la distribution conjointe des couplages et anti-couplages, et ainsi, soit de renforcer, soit de rejeter définitivement les idées avancées dans la Section 3.4.

Chapitre 5

Graphes petits-mondes et algorithmique distribuée

Ce chapitre, sans aucun lien avec les précédents, présente de manière beaucoup plus informelle et elliptique un autre aspect de mes activités de recherche récentes, axé sur les modèles de “graphes petits-mondes” et l’algorithmique distribuée probabiliste.

5.1 Graphes petits-mondes

“Le monde est petit” : l’expression est devenue un lieu commun, employé pour relever une coïncidence lorsque l’on découvre que deux personnes que l’on connaît via des milieux *a priori* différents, s’avèrent se connaître. On cite généralement l’expérience de Milgram [50], dans les années 1960, comme indicatrice que deux personnes prises au hasard sont souvent reliées par une courte séquence de connaissances mutuelles. Stanley Milgram avait confié des documents à des volontaires, avec pour consigne de les faire parvenir à une personne inconnue dont elles n’avaient que la ville de résidence et la profession, en les faisant passer de la main à la main à des personnes susceptibles de connaître le destinataire ou de connaître quelqu’un qui le connaissait. La constatation qu’une proportion non négligeable des documents étaient parvenus au destinataire, et que ceux qui étaient arrivés étaient passés en moyenne entre moins de 5 paires de mains, est apparemment à l’origine du lieu commun des “six degrés de séparation” entre deux personnes (en l’occurrence, vivant aux États-Unis).

L’expérience de Milgram a été beaucoup critiquée pour son biais dans la sélection des intervenants, mais elle a en quelque sorte connu une seconde vie avec le développement, dans les années 1990, de l’étude des “graphes de réseaux sociaux”. L’idée est de définir un graphe dont les sommets sont, par exemple, des individus, et les arêtes sont indicatrices de relations sociales entre individus. La collecte d’informations réelles sur de tels réseaux est difficile, mais les expériences montrent qu’ils ont tendance à présenter des caractéristiques structurelles particulière : faible densité globale (les sommets ont un degré moyen faible par rapport à la taille du graphe), faible diamètre (typiquement, d’ordre de grandeur logarithmique par rapport à la taille totale), et “densité locale forte”, quelle que soit la définition employée pour la mesurer (par exemple, proportion, parmi les paires de sommets qui partagent un même voisin, de celles qui sont reliées directement par une arête : on compte essentiellement les triangles du graphe), distribution des degrés “en loi de puissance” (la proportion des sommets qui a degré k ne décroît que polynomialement lorsque k augmente : il existe un petit nombre de sommets très connectés). Les graphes présentant ces caractéristiques (et, à ce stade, elles sont volontairement floues) sont typiquement qualifiés de “graphes petits-mondes”, et différents modèles, souvent randomisés, ont été proposés pour construire des graphes présentant de telles caractéristiques.

5.1.1 Petits-mondes navigables

Kleinberg [40, 41] propose un modèle qui tente de rendre compte non pas de l'*existence* de courts chemins entre sommets de ces graphes, mais du fait que, sans connaissance globale du réseau, il soit possible de *trouver* de tels courts chemins. Plus précisément, Kleinberg considère un graphe formé d'une grille de dimension D , auquel il ajoute, pour chaque sommet, un lien vers un autre sommet choisi aléatoirement selon une loi de probabilités à spécifier. Il étudie alors, pour deux sommets s et t , la longueur du chemin de s à t obtenu par l'algorithme glouton du "voisin qui rapproche le plus" : si le k -ème sommet est s' , le $k + 1$ -ème sera, parmi les voisins de s' , celui dont la distance à t dans la grille sera la plus faible (avec un mécanisme de choix arbitraire en cas d'égalité). La distance (dans la grille) à la destination décroît donc strictement à chaque pas, et l'algorithme glouton est donc assuré de trouver un chemin vers la destination.

Le résultat de Kleinberg, démontré initialement pour la grille de dimension 2 mais immédiatement généralisable à une grille de dimension quelconque, est double : si l'on note $d(u, v)$ la distance dans la grille entre deux sommets u et v , D la dimension de la grille, et N le nombre total de sommets, alors

- si, pour le lien aléatoire issu du sommet s , sa destination est choisie selon la loi qui donne à chaque sommet t une probabilité inversement proportionnelle à $d(u, v)^D$, alors la longueur moyenne du chemin glouton entre deux sommets arbitraires u et v est $O(\log(N) \log(d(u, v)))$;
- si, au contraire, la loi de la destination du lien aléatoire issu de u accorde à v une probabilité inversement proportionnelle à $d(u, v)^\alpha$, avec $\alpha \neq D$, il existe des paires de sommets telles que la longueur moyenne du chemin glouton de u à v soit $\Omega(N^\beta)$, où $\beta > 0$ s'exprime seulement en fonction de N , D et α .

La preuve de la majoration (dans le cas $\alpha = D$) repose sur le fait que, à chaque pas, la probabilité de diviser par deux la distance à la cible est au moins de l'ordre de $1/\log(N)$, avec des tentatives indépendantes puisqu'elles portent sur les liens aléatoires de sommets distincts. Pour la minoration, la preuve distingue les cas $\alpha > D$ et $\alpha < D$. Dans le premier cas, les liens aléatoires sont "trop courts" pour qu'en additionnant les distances dans la grille entre les extrémités de N^β liens, on puisse espérer dépasser le diamètre de la grille. Dans le second cas, la loi de probabilité donne trop peu de poids aux sommets proches, et on exhibe une boule de rayon polynomial autour de la destination telle qu'il soit assez probable que, une fois entré dans la boule, le chemin glouton ne trouve aucun raccourci et doive se contenter d'un plus court chemin de la grille.

Le modèle de grille augmentée de Kleinberg est à rapprocher d'un modèle de percolation étudié par Coppersmith, Gamarnik et Sviridenko [22], dans lequel les sommets de la grille sont reliés par une arête (s'ils ne sont pas déjà voisins) aléatoirement, indépendamment pour chaque paire de sommets, avec une probabilité proportionnelle à leur distance élevée à une puissance choisie en paramètre. Ces auteurs démontrent alors que le diamètre du graphe subit une transition de phase lorsque l'exposant est le *double* de la dimension : pour un exposant trop grand, le diamètre est polynomial en la taille du graphe (avec un phénomène proche de celui décrit par Kleinberg : les arêtes reliant deux sommets lointains sont trop peu nombreuses), alors que pour un exposant inférieur à deux fois la dimension, il est, avec probabilité proche de 1, $O(\log^\beta(N))$ pour une constante β .

La principale différence entre les deux modèles est que, dans un cas, toutes les arêtes sont indépendantes, alors que dans l'autre le degré sortant de chaque sommet est fixé. On s'attend toutefois à ce que des caractéristiques telles que le diamètre soient très similaires d'un modèle à l'autre, pour peu que les paramètres soient choisis correctement. On a alors, pour un exposant compris entre la dimension et son double, un graphe qui est un "petit monde structurel" dans le sens où il a un petit diamètre, mais un "grand monde algorithmique" dans le sens où il est très peu probable que l'algorithme glouton *trouve* de courts chemins entre sommets arbitraires.

La construction de Kleinberg a été généralisée [32] à une classe assez large de graphes beaucoup moins réguliers que les grilles. Convenons de dire qu'un graphe est à *croissance C -bornée* si, pour tout entier r et tout sommet u , la boule $B(u, 2r)$ (ensemble des sommets à distance au plus $2r$ de u) contient au plus C fois plus de sommets que la boule $B(u, r)$ de même centre et de rayon moitié moindre. Le résultat principal de [32] est qu'une distribution d'arêtes aléatoires similaire à celle de Kleinberg transforme tout

graphe à croissance bornée en “petit-monde navigable”, *i.e.* un graphe dans lequel l’algorithme glouton trouve entre toute paire de sommets un chemin dont l’espérance de la longueur est bornée par une puissance du *logarithme* de la taille de la plus petite boule centrée à la source et contenant la destination.

Continuant dans cette veine, l’article [33] donne, sous des hypothèses comparables, un algorithme décentralisé, basé sur la construction d’arbres hiérarchiques couvrant l’ensemble du graphe, qui permet de générer les arêtes aléatoires qui transforment le graphe en petit monde navigable. Sans prétendre simuler la façon dont se tissent les liens dans un réseau social, il s’agit ici de montrer que la connaissance globale du réseau n’est pas nécessaire à l’établissement d’une distribution “petit-monde”.

Il est naturel de se demander quels sont les graphes qui peuvent être ainsi transformés en petits-mondes navigables. Fraigniaud, Lebar et Lotker [38] donnent une condition nécessaire, exprimée en termes d’une majoration de la *dimension doublante* (un espace métrique est de dimension doublante k si toute boule peut être couverte par 2^k boules de rayon deux fois moindre; la notion est proche, mais pas identique à celle de croissance bornée). Plus généralement, si le choix uniforme des liens aléatoires conduit à un “diamètre glouton” probable de $O(\sqrt{n})$ pour tout graphe à n sommets, il est sensiblement plus difficile de concevoir des schémas universels d’augmentation qui diminuent beaucoup cette borne, le record étant détenu par Fraigniaud *et al.* [37] qui obtiennent (à facteurs logarithmiques près) $O(n^{1/3})$.

5.1.2 Modèles de graphes “sans échelle”

Un certain nombre d’auteurs [1, 5, 21, 55, 13] ont proposé des modèles pour rendre compte des caractéristiques structurelles des graphes de type “réseaux sociaux” et “graphe d’internet”. Souvent, l’accent est mis sur la distribution de degrés, dont on observe empiriquement qu’elle semble suivre approximativement une loi de puissance (distribution de Pareto) : la proportion des sommets qui sont de degré k est approximativement proportionnelle à $k^{-\alpha}$, pour une constante α comprise entre 2 et 3. Le plus cité de ces modèles est un modèle à “attachement préférentiel” [5], dans lequel les sommets arrivent un à un et se choisissent alors un ou plusieurs voisins aléatoires, chaque lien étant vers un sommet choisi avec une probabilité proportionnelle à son degré courant. Un certain nombre de variantes ont été proposées et étudiées [10, 11, 9, 21, 20, 19, 56], tendant à estimer de manière précise la distribution des degrés et divers autres paramètres tels que le diamètre, qui est typiquement logarithmique.

Dans un travail en commun avec Nicole Eggemann et Nicolas Hanusse [30, 31], nous montrons que, pour certains au moins de ces modèles, la propriété de distribution des degrés et le faible diamètre ne s’accompagne pas d’une propriété de navigabilité. Plus précisément, la connaissance du processus de construction du graphe et, pour chaque sommet rencontré, de son ordre d’apparition, ne permet pas, en examinant un par un les liens des sommets rencontrés, de trouver un chemin court (de longueur $O(\log(n))$ ou $\log^{O(1)}(n)$) du sommet 1 (le plus ancien) au sommet n (le plus récent). L’argument est de type théorie de l’information : les \sqrt{n} derniers sommets sont difficilement distinguables, et un algorithme qui cherche l’un d’eux a tendance à les “découvrir” dans un ordre quasi uniforme.

5.2 Structuration de plates-formes de calcul distribuées

Une autre thématique de recherche est celle de l’algorithmique pour les *plates-formes distribuées à grande échelle*, thématique développée dans le cadre de l’équipe-projet INRIA Cépage. L’un des objectifs est ici de proposer des modèles de structuration et des algorithmes aux performances prouvées pour des systèmes de calcul distribué collaboratif.

Dans un travail commun avec Olivier Beaumont et Mirosław Korzeniowski [8], nous décrivons et analysons une méthode d’appariement aléatoire distribué de ressources, basée sur l’utilisation de *tables de hachages distribuées*, et qui fonctionne efficacement même en présence de fortes hétérogénéités. Étant donné un ensemble de nœuds, chacun disposant d’une capacité sortante et entrante (qui peuvent représenter des bandes passantes entrante et sortante, ou des demandes et offres d’une ressource), le problème est d’obtenir, de manière décentralisée, un appariement aléatoire d’un nombre maximum de ces ressources. La solution que nous proposons permet d’obtenir un tel appariement en (en moyenne) $O(\log^2(N))$ messages

et requêtes dans une table de hachage distribuée, mais requiert un fonctionnement semi-synchrone sous la forme d'une succession de rondes (sans utiliser de rondes de calcul, il est difficile d'assurer l'uniformité de l'appariement obtenu). Une des applications d'un tel dispositif est la diffusion d'une information dans un réseau virtuel (de type pair-à-pair) dans lequel les participants ont des bandes passantes très différentes ; on obtient un processus de diffusion rapide ($O(\log(n))$ rondes) et efficace ($O(n \log(n))$ messages), dans lequel les nœuds sont sollicités en proportion de leurs capacités.

Dans un autre travail, correspondant au début de thèse d'Hubert Larchevêque [7], nous nous intéressons à l'auto-organisation d'un ensemble de nœuds en groupes disposant d'une puissance cumulée suffisante, et séparés par des temps de latence (simulés sous la forme d'un espace métrique) inférieurs à une limite fixée. Le problème se ramène à une variante de BINCOVERING, dans laquelle on ajoute des contraintes de distance. En organisant le système au moyen d'un *skip-graph* randomisé [3, 4], qui constitue la version distribuée des *skip-lists* [63], nous obtenons, lorsque l'espace métrique des latences est assimilable à \mathbb{R}^d (avec d petit), un algorithme décentralisé qui réalise une approximation à un facteur constant de l'optimal, au prix d'une légère relaxation des contraintes de distance.

Annexe A

Bibliographie

- [1] William Aiello, Fan Chung, and Linyuan Lu. A random graph model for massive graphs. In *Proceedings of the Thirty-Second Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 171–180 (electronic), New York, 2000. ACM.
- [2] George E. Andrews. Plane partitions. V. The TSSCPP conjecture. *J. Combin. Theory Ser. A*, 66(1) :28–39, 1994.
- [3] James Aspnes and Gauri Shah. Skip graphs. In *Proceedings of the Fourteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (Baltimore, MD, 2003)*, pages 384–393, New York, 2003. ACM.
- [4] James Aspnes and Gauri Shah. Skip graphs. *ACM Trans. Algorithms*, 3(4) :Art. 37, 25, 2007.
- [5] A.-L. Barabási and R. Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439) :509–512, 1999.
- [6] M.T. Batchelor, Jan de Gier, and Bernard Nienhuis. The quantum symmetric XXZ chain at $\delta = -\frac{1}{2}$, alternating-sign matrices and plane partitions. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 34(19) :L265–L270, 2001.
- [7] Olivier Beaumont, Nicolas Bonichon, Philippe Duchon, and Hubert Larchevêque. Distributed approximation algorithm for resource clustering. In *Proceedings of SIROCCO 2008*, volume 5058 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 61–73. Springer, 2008.
- [8] Olivier Beaumont, Philippe Duchon, and Mirosław Korzeniowski. Heterogeneous dating service with application to rumor spreading. In *Proceedings of IPDPS 2008*, pages 1–10. IEEE, 2008.
- [9] Béla Bollobás and Oliver Riordan. The diameter of a scale-free random graph. *Combinatorica*, 24(1) :5–34, 2004.
- [10] Béla Bollobás, Oliver Riordan, Joel Spencer, and Gábor Tusnády. The degree sequence of a scale-free random graph process. *Random Structures Algorithms*, 18(3) :279–290, 2001.
- [11] Béla Bollobás and Oliver M. Riordan. Mathematical results on scale-free random graphs. In *Handbook of graphs and networks*, pages 1–34. Wiley-VCH, Weinheim, 2003.
- [12] David Bressoud. *Proofs and confirmations. The story of the alternating sign matrix conjecture*. Cambridge University Press, 1999.
- [13] Pierce G. Buckley and Deryk Osthus. Popularity based random graph models leading to a scale-free degree sequence. *Discrete Math.*, 282(1-3) :53–68, 2004.
- [14] Fabrizio Caselli and Christian Krattenthaler. Proof of two conjectures of Zuber on fully packed loop configurations. *J. Combin. Theory Ser. A*, 108 :123–146, 2004.
- [15] Fabrizio Caselli, Christian Krattenthaler, Bodo Lass, and Philippe Nadeau. On the number of fully packed loop configurations with a fixed associated matching. *Electron. J. Combin.*, 11(2) :Research paper R16, 43 pp., 2005.
- [16] Mihai Ciucu. Enumeration of perfect matchings in graphs with reflective symmetry. *J. Combin. Theory Ser. A*, 77(1) :67–97, 1997.

- [17] Mihai Ciucu. The equivalence between enumerating cyclically symmetric, self-complementary and totally symmetric, self-complementary plane partitions. *J. Combin. Theory Ser. A*, 86(2) :382–389, 1999.
- [18] J. H. Conway and J. C. Lagarias. Tiling with polyominoes and combinatorial group theory. *J. Combin. Theory Ser. A*, 53(2) :183–208, 1990.
- [19] Colin Cooper. Distribution of vertex degree in web-graphs. *Combin. Probab. Comput.*, 15(5) :637–661, 2006.
- [20] Colin Cooper and Alan Frieze. A general model of web graphs. *Random Structures Algorithms*, 22(3) :311–335, 2003.
- [21] Colin Cooper and Alan M. Frieze. A general model of undirected web graphs. In *Algorithms—ESA 2001 (Århus)*, volume 2161 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 500–511. Springer, Berlin, 2001.
- [22] Don Coppersmith, David Gamarnik, and Maxim Sviridenko. The diameter of a long range percolation graph. In *SODA '02 : Proceedings of the thirteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 329–337, Philadelphia, PA, USA, 2002. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [23] Jan de Gier. Loops, matchings and alternating-sign matrices. *Discrete Math.*, 298(1-3) :365–388, 2005.
- [24] P. Di Francesco. A refined Razumov-Stroganov conjecture. *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, 2004(8) :009, 16 pp. (electronic), 2004.
- [25] P. Di Francesco. A refined Razumov-Stroganov conjecture. II. *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, 2004(11) :004, 20 pp. (electronic), 2004.
- [26] P. Di Francesco, P. Zinn-Justin, and J.-B. Zuber. A bijection between classes of fully packed loops and plane partitions. *Electron. J. Combin.*, 11(1) :Research Paper 64, 11 pp. (electronic), 2004.
- [27] P. Di Francesco and J.-B. Zuber. On fully packed loop configurations with four sets of nested arches. *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, pages P06005, 20 pp. (electronic), 2004.
- [28] Philippe Di Francesco and Paul Zinn-Justin. Around the Razumov-Stroganov conjecture : proof of a multi-parameter sum rule. *Electron. J. Combin.*, 12 :Research paper R6, 27 pp., 2005.
- [29] Philippe Duchon. On the link pattern distribution of quarter-turn symmetric FPL configurations. In *Proceedings of FPSAC 2008*, 2008. 12 pages.
- [30] Philippe Duchon, Nicole Eggemann, and Nicolas Hanusse. Brief announcement : Non-searchability of random scale-free graphs. In *Proceedings of PODC 2007*, 2007. Brief announcement.
- [31] Philippe Duchon, Nicole Eggemann, and Nicolas Hanusse. Non-searchability of random power-law graphs. In *Proceedings of OPODIS 2007*, pages 274–285. Springer, 2007.
- [32] Philippe Duchon, Nicolas Hanusse, Emmanuelle Lebhar, and Nicolas Schabanel. Could any graph be turned into a small-world? *Theoretical Computer Science*, 355(1) :96–103, 2006.
- [33] Philippe Duchon, Nicolas Hanusse, Emmanuelle Lebhar, and Nicolas Schabanel. Towards small world emergence. In *Proceedings of SPAA 2006*, pages 225–232. ACM Press, 2006.
- [34] Philippe Duchon and Florent Le Gac. Exact random generation of symmetric and quasi-symmetric alternating-sign matrices. In *Proceedings of GASCOM 2008*, 2008.
- [35] Noam Elkies, Greg Kuperberg, Michael Larsen, and James Propp. Alternating-sign matrices and domino tilings. I. *J. Algebraic Combin.*, 1(2) :111–132, 1992.
- [36] Noam Elkies, Greg Kuperberg, Michael Larsen, and James Propp. Alternating-sign matrices and domino tilings. II. *J. Algebraic Combin.*, 1(3) :219–234, 1992.
- [37] Pierre Frainaud, Cyril Gavoille, Adrian Kosowzki, Emmanuelle Lebhar, and Zvi Lotker. Uniform augmentation schemes for network navigability : Overcoming the \sqrt{n} -barrier. In *SPAA 07 : Proceedings of the 19th ACM Symposium on Parallelism in Algorithms and Architectures*, pages 1–7, 2007.

-
- [38] Pierre Fraigniaud, Emmanuelle Lebhar, and Zvi Lotker. A doubling dimension threshold $\Theta(\log \log n)$ for augmented graph navigability. In *Algorithms—ESA 2006*, volume 4168 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 376–386. Springer, Berlin, 2006.
- [39] Ira Gessel and Gérard Viennot. Binomial determinants, paths, and hook length formulae. *Adv. in Math.*, 58(3) :300–321, 1985.
- [40] Jon Kleinberg. The small-world phenomenon : an algorithm perspective. In *Proceedings of the Thirty-Second Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 163–170 (electronic), New York, 2000. ACM.
- [41] Jon Kleinberg. Complex networks and decentralized search algorithms. In *International Congress of Mathematicians. Vol. III*, pages 1019–1044. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.
- [42] C. Krattenthaler. Advanced determinant calculus. *Sém. Lothar. Combin.*, 42 :Art. B42q, 67 pp. (electronic), 1999. The Andrews Festschrift (Maratea, 1998).
- [43] Greg Kuperberg. Symmetries of plane partitions and the permanent-determinant method. *J. Combin. Theory Ser. A*, 68(1) :115–151, 1994.
- [44] Greg Kuperberg. Another proof of the alternating-sign matrix conjecture. *Internat. Math. Res. Notices*, 1996(3) :139–150, 1996.
- [45] Greg Kuperberg. An exploration of the permanent-determinant method. *Electron. J. Combin.*, 5 :Research paper R46, 1998.
- [46] Greg Kuperberg. Symmetry classes of alternating-sign matrices under one roof. *Ann. of Math. (2)*, 156(3) :835–866, 2002.
- [47] Florent Le Gac. Couplages plans. Master’s thesis, Université de Bordeaux, 2007.
- [48] Bernt Lindström. On the vector representations of induced matroids. *Bull. London Math. Soc.*, 5 :85–90, 1973.
- [49] Percy A. MacMahon. *Combinatory analysis. Vol. I, II (bound in one volume)*. Dover Phoenix Editions. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2004. Reprint of *An introduction to combinatory analysis* (1920) and *Combinatory analysis. Vol. I, II* (1915, 1916).
- [50] S. Milgram. The small world problem. *Psychology Today*, 61(1), 1967.
- [51] W. H. Mills, David P. Robbins, and Howard Rumsey, Jr. Proof of the Macdonald conjecture. *Invent. Math.*, 66(1) :73–87, 1982.
- [52] W. H. Mills, David P. Robbins, and Howard Rumsey, Jr. Alternating sign matrices and descending plane partitions. *J. Combin. Theory Ser. A*, 34(3) :340–359, 1983.
- [53] W. H. Mills, David P. Robbins, and Howard Rumsey, Jr. Enumeration of a symmetry class of plane partitions. *Discrete Math.*, 67(1) :43–55, 1987.
- [54] S. Mitra, B. Nienhuis, J. de Gier, and M. T. Batchelor. Exact expressions for correlations in the ground state of the dense $O(1)$ loop model. *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, 2004(9) :010, 24 pp. (electronic), 2004.
- [55] T. F. Móri. On random trees. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 39(1-2) :143–155, 2002.
- [56] Tamás F. Móri. The maximum degree of the Barabási-Albert random tree. *Combin. Probab. Comput.*, 14(3) :339–348, 2005.
- [57] Soichi Okada. Enumeration of symmetry classes of alternating sign matrices and characters of classical groups. *J. Algebraic Combin.*, 23(1) :43–69, 2006.
- [58] Robert A. Proctor. Shifted plane partitions of trapezoidal shape. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 89(3) :553–559, 1983.
- [59] Robert A. Proctor. A bideterminant proof of a product identity for plane partitions with symmetries. *J. Statist. Plann. Inference*, 34(2) :239–250, 1993.
- [60] James Propp. Lattice structure for orientations of graphs. Unpublished manuscript available at <http://faculty.uml.edu/jpropp/orient.html>, 1993.

- [61] James Propp. The many faces of alternating-sign matrices. In *Discrete models : combinatorics, computation, and geometry (Paris, 2001)*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AA, pages 043–058 (electronic). Maison Inform. Math. Discrèt. (MIMD), Paris, 2001.
- [62] James Propp. Generalized domino-shuffling. *Theoret. Comput. Sci.*, 303(2-3) :267–301, 2003. Tilings of the plane.
- [63] William Pugh. Skip lists : a probabilistic alternative to balanced trees. In *Algorithms and data structures (Ottawa, ON, 1989)*, volume 382 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 437–449. Springer, Berlin, 1989.
- [64] A. V. Razumov and Yu. G. Stroganov. Spin chains and combinatorics. *J. Phys. A*, 34(14) :3185–3190, 2001.
- [65] A. V. Razumov and Yu. G. Stroganov. Combinatorial nature of the ground-state vector of the $o(1)$ loop model. *Theoret. and Math. Phys.*, 138(3) :333–337, 2004.
- [66] A. V. Razumov and Yu. G. Stroganov. $o(1)$ loop model with different boundary conditions and symmetry classes of alternating-sign matrices. *Theoret. and Math. Phys.*, 142(2) :237–243, 2005.
- [67] A. V. Razumov and Yu. G. Stroganov. Enumeration of odd-order alternating-sign half-turn-symmetric matrices. *Theoret. and Math. Phys.*, 148(3) :1174–1198, 2006.
- [68] A. V. Razumov and Yu. G. Stroganov. Enumeration of quarter-turn-symmetric alternating-sign matrices of odd order. *Theoret. Math. Phys.*, 149(3) :1639–1650, 2006.
- [69] David P. Robbins. Symmetry classes of alternating sign matrices. Unpublished manuscript available as arXiv :math/0008045, 2000.
- [70] N. J. A. Sloane. The on-line encyclopedia of integer sequences. Available online as <http://www.research.att.com/~njas/sequences/>.
- [71] Richard P. Stanley. Symmetries of plane partitions. *J. Combin. Theory Ser. A*, 43(1) :103–113, 1986.
- [72] John R. Stembridge. The enumeration of totally symmetric plane partitions. *Adv. Math.*, 111(2) :227–243, 1995.
- [73] Johan Thapper. Refined counting of fully packed loop configurations. *Sém. Lothar. Combin.*, 56 :Art. B56e, 27 pp. (electronic), 2006/07.
- [74] William P. Thurston. Conway’s tiling groups. *Amer. Math. Monthly*, 97(8) :757–773, 1990.
- [75] Benjamin Wieland. A large dihedral symmetry of the set of alternating sign matrices. *Electron. J. Combin.*, 7 :Research Paper 37, 13 pp. (electronic), 2000.
- [76] David Bruce Wilson. How to couple from the past using a read-once source of randomness. *Random Structures Algorithms*, 16(1) :85–113, 2000.
- [77] Doron Zeilberger. Proof of the alternating sign matrix conjecture. *Electron. J. Combin.*, 3(2) :Research paper R13, approx. 84 pp. (electronic), 1996. The Foata Festschrift.
- [78] J.-B. Zuber. On the counting of fully packed loop configurations : some new conjectures. *Electron. J. Combin.*, 11(1) :Research Paper 13, 15 pp. (electronic), 2004.

Annexe B

Curriculum vitae

Philippe DUCHON

Section CNU	27
Né	le 17 octobre 1969 à Nancy (54)
Nationalité	Française
Fonction	MAÎTRE DE CONFÉRENCES ENSEIRB
Adresse	LABRI -INRIA BORDEAUX - SUD-OUEST Campus Universitaire 351, cours de la libération 33405 Talence cedex France Tel. : (+33) 5 4000 6912
mèl :	Philippe.Duchon@labri.fr

Résumé

2006-2008	Délégation CNRS (18 mois)
1999-	Maître de conférences à l'ENSEIRB
1998-1999	ATER à l'université Bordeaux 1
6 juin 1998	Doctorat (Informatique) de l'université Bordeaux 1 Titre : <i>Q</i> -grammaires : un outil pour l'énumération Jury : Philippe FLAJOLET (président), Jean-Marc FÉDOU (rapporteur), Renzo PINZANI (rapporteur), Mireille BOUSQUET-MÉLOU (examinatrice), Daniel KROB (examineur), Maylis DELEST (directrice de thèse).
1996-1998	Allocataire moniteur normalien à l'université Bordeaux 1
1993-1994	Allocataire moniteur normalien à l'université Bordeaux 1
1992	Agrégation de mathématiques
1989-1993	Élève à l'École Normale Supérieure (Paris)

B.1 Responsabilités et activités collectives

B.1.1 Responsabilités administratives et pédagogiques

- Participation à des **commissions de spécialistes** : je suis depuis 2004 membre (titulaire, membre du bureau) de la commission de spécialistes (section 27) de l'université Bordeaux 1 ; j'ai également

été membre extérieur (titulaire) de la commission de spécialiste de l'université de Caen (2004-2007) et, depuis 2007, de celle de l'université Paris Denis Diderot (Paris 7).

- J'ai été, en 2003 puis de nouveau à partir de 2005, membre du **conseil de perfectionnement** de l'ENSEIRB.
- Responsable pédagogique des **projets de première année** en filière Informatique à l'ENSEIRB, de 2000 à 2006 (responsabilité interrompue en 2006 lors de ma délégation CNRS)
- Depuis la rentrée 2008, je suis responsable de la **première année** de la filière Informatique à l'ENSEIRB.

B.1.2 Animation de la recherche

- Je suis depuis 2001 responsable du **groupe de travail de combinatoire énumérative** du LaBRI, qui rassemble chaque semaine de 10 à 20 participants. Dans le cadre de la "petite école de combinatoire" accolée à ce groupe de travail, j'ai proposé deux séries d'exposés-cours :
 - en 1999, avec Mireille Bousquet-Mélou, une série de 4 exposés sur les *bases de Gröbner* (définitions, algorithme de Buchberger) ;
 - en 2004, une série de 10 exposés sur les *chaînes de Markov* dans le cadre de la *génération aléatoire* (critères et vitesse de convergence, génération aléatoire "exacte" par la méthode du "couplage depuis le passé").
- Participation régulière, depuis 1999, aux rencontres nationales Aléa (groupe de travail du GDR Informatique Mathématique). Lors des rencontres 2006, j'ai donné un mini-cours sur la génération aléatoire par chaînes de Markov.
- Co-organisateur, avec Jean-François Marckert, des rencontres Aléa 2008 (10 au 14 mars 2008).
- Membre du **comité de programme** d'ALGOTEL 08 (Rencontres francophones sur les aspects algorithmiques des communications)

B.2 Enseignement et encadrement doctoral

B.2.1 Activités régulière d'enseignement

Depuis ma nomination en qualité de maître de conférences à l'ENSEIRB en 1999, j'ai assuré un service annuel d'enseignement compris entre 200 et 270 heures équivalent-TD.

Initiation Unix Sous la forme de travaux pratiques essentiellement, il s'agit de familiariser les élèves ingénieurs avec l'environnement informatique et les outils de base qui seront mis à leur disposition pendant leur scolarité à l'école.

Programmation Travaux dirigés de programmation impérative (en langage C), de programmation orientée objets (en Java) et de programmation fonctionnelle (en Scheme). Ces travaux dirigés sont invariablement accompagnés de projets, à l'encadrement et à la définition desquels j'ai également participé.

Algorithmique Travaux dirigés d'algorithmique des graphes et d'algorithmique numérique, également accompagnés de projets encadrés.

Algorithmique probabiliste Il s'agit d'un cours que j'ai créé, et qui est proposé en option aux élèves-ingénieurs de deuxième année. On y étudie les possibilités offertes par l'aléatoire en algorithmique, y compris par la randomisation de structures de données. Ce cours est accompagné d'un polycopié que j'ai rédigé.

Cryptologie Travaux dirigés de Cryptologie, au cours desquels, après une brève évocation des techniques de cryptologie à clé secrète, on se concentre sur la cryptologie à clé publique et ses "briques de base" (fonctions à sens unique, protocoles d'échange de clés, mise en gage...).

Encadrement de projets Les élèves ingénieurs ENSEIRB réalisent chaque année, en application de leurs cours, un certain nombre de projets ; j'ai activement participé à l'encadrement suivi de ces

projets, et, comme responsable des projets en première année, à la réorganisation des projets et de leur encadrement par les enseignants. Également, encadrement pédagogique de “projets de fin d’année” en deuxième année (projets réalisés sur environ deux mois par des équipes d’une demi-douzaine d’élèves ingénieurs, avec une orientation “génie logiciel” plus marquée).

Théorie de l’information Introduction aux notions d’information, d’entropie, et de codage.

Probabilités et statistiques Travaux dirigés de probabilités et statistiques.

Bien entendu, comme tous les enseignants de l’établissement, j’ai également participé à l’encadrement de stages et de projets de fin d’études, et aux jurys correspondants.

B.2.2 Enseignement en formation doctorale

J’ai assuré de 2004 à 2006 (interruption depuis, pour cause de délégation CNRS) un cours d’une trentaine d’heures en Master 2 Informatique (parcours Modèles et Algorithmes) à Bordeaux 1, intitulé **Outils probabilistes pour l’algorithmique**. Ce cours propose une introduction aux algorithmes et structures de données randomisés et à leur analyse.

B.2.3 Encadrement doctoral

- encadrement, avec Nicolas Hanusse, du mémoire de Master 2 Recherche de **Florimond Simonk-lein** (2004), autour du *Routage dans les graphes petits-mondes* ;
- encadrement du mémoire de Master 2 Recherche de **Florent Le Gac** (2007), pour une étude combinatoire des *Couplages plans* ;
- co-encadrement, avec Olivier Beaumont et Nicolas Bonichon, du mémoire de Master 2 Recherche d’**Hubert Larchevêque** (2007) : *Bin covering distribué avec et sans diamètre contraint pour les plate formes à grande échelle* ;
- ces deux étudiants ont chacun entamé en septembre 2007 une thèse que je co-encadre : Florent Le Gac (en codirection avec Robert Cori) sur la *Génération aléatoire et les propriétés locales d’objets combinatoires*, et Hubert Larchevêque (en codirection avec Olivier Beaumont et Nicolas Bonichon) sur la *Conception de nouveaux services pour la distribution de calculs sur des plates formes à grande échelle*.

B.3 Résumé de l’activité de recherche

Mes activités de recherche se situent, à parts à peu près égales, dans deux domaines assez distincts : la combinatoire énumérative d’une part, l’algorithmique distribuée d’autre part.

B.3.1 Combinatoire énumérative : génération aléatoire et matrices à signes alternants

Mon domaine de recherche initial était la combinatoire énumérative et analytique. J’ai étudié dans ma thèse, pour des familles d’objets discrets “décomposables” de manière symbolique, des ensembles de statistiques pour lesquelles la décomposition donne une définition récursive additive, ce qui conduit pour les séries génératrices appropriées à des équations fonctionnelles avec compositions. Il est alors possible d’isoler plus ou moins automatiquement, pour chaque statistique, un comportement asymptotique *moyen* et un comportement asymptotique *maximal*. Un prolongement naturel est l’étude asymptotique *en distribution*, pour laquelle différents indices semblent indiquer qu’il existe un petit nombre de comportements génériques mis en évidence par l’étude d’objets particuliers (typiquement, des familles d’arbres) convergeant vers des objets continus (mouvement ou excursion brownienne par exemple).

Les décompositions d’objets amènent naturellement à des techniques élégantes et efficaces pour la *génération aléatoire* de certains des objets étudiés [6], et les manipulations de séries génératrices peuvent

parfois s'adapter à l'étude de statistiques plus complexes que les statistiques additives, comme les nombres de Strahler généralisés sur des familles d'arbres [13]. Cette thématique double de l'étude asymptotiques d'objets discrets de grande taille, et de leur génération aléatoire (uniforme ou selon des lois précisément définies), s'intègre naturellement dans le cadre du projet ANR SADA (Structures Aléatoires Discrètes et Algorithmes) dirigé par Mireille Bousquet-Mélou.

Plus récemment, je me suis intéressé à des objets beaucoup moins "décomposables" que sont les *matrices à signes alternants* et leurs nombreux avatars (configurations de boucles compactes, modèles de "glace sur réseau carré", notamment, en physique). Ces objets (matrices carrées, dont les entrées non nulles sont contraintes à valoir ± 1 , les signes alternant strictement dans chaque ligne et colonne) proviennent de l'étude de formules de calcul de déterminants, et une formule pour leur énumération a été proposée vers le milieu des années 80. La preuve de cette formule a mobilisé beaucoup d'énergies jusqu'au milieu des années 90, aboutissant à deux preuves indépendantes par Zeilberger et Kuperberg. Les méthodes de Kuperberg, faisant appel à des outils provenant de la physique statistique (fonctions de partition et équations de Yang-Baxter) se sont révélées les plus souples, et ont permis également d'énumérer rigoureusement la plupart des classes de symétrie de ces matrices. Dans ce domaine, j'ai été amené à définir une nouvelle classe de quasi-symétrie de ces matrices et à conjecturer une formule d'énumération [23], puis, dans un travail encore en cours avec Jean-Christophe Aval, à démontrer cette formule.

L'intérêt de la communauté combinatoire pour les matrices à signes alternants a été relancé par une conjecture fascinante due aux physiciens Razumov et Stroganov, et qui prétend décrire la distribution d'une statistique particulière définie sur ces mêmes matrices (les "couplages plans" dont l'étude du graphe orienté a fait l'objet du mémoire de Master de Florent Le Gac) comme la distribution invariante selon des transformations locales particulières. Dans la foulée, d'autres chercheurs ont proposé des conjectures "à la Razumov-Stroganov" pour des classes de symétrie de ces matrices. C'est précisément la formulation d'une conjecture de ce type sur les matrices invariantes par rotation d'un quart de tour, en lien avec une conjecture précédente due à de Gier *et al.* sur les matrices invariantes par demi tour, qui m'a amené à étudier des classes de quasi-symétrie [23].

Ces travaux sont en quelque sorte un sous-produit de tentatives ambitieuses (au moins de ma part) de démontrer la conjecture de Razumov-Stroganov par des méthodes de combinatoire bijective, qui constituaient le sujet principal de mon projet de recherches pour mon accueil en délégation auprès du CNRS (2006-2008). Ces efforts n'ont à l'heure actuelle pas abouti (et la conjecture reste ouverte, même si des progrès substantiels ont été obtenus), et continuent au sein du projet ANR MARS (Matrices à Signes Alternants, Razumov et Stroganov) dirigé par Xavier Viennot et regroupant des chercheurs du LaBRI et de Marne-la-Vallée.

B.3.2 Algorithmique distribuée : petits-mondes et algorithmes pour les plates-formes à grande échelle

Le second volet, bien distinct du précédent, de mes activités de recherches, concerne l'algorithmique distribuée probabiliste et se déroule actuellement dans le cadre du projet ANR ALPAGE (Algorithmique pour les Plateformes à Grande Échelle) et de la jeune équipe-projet INRIA Cépage, tous deux dirigés par Olivier Beaumont.

Les systèmes modélisés ici sont des ensembles pas ou peu structurés de processeurs, dont les ressources disponibles en termes de capacité de calcul (ou même en termes de disponibilité tout court) sont susceptibles de varier significativement au cours du temps, et que l'on souhaite faire participer à des tâches de calcul collaboratif. Les applications pilotes, de type BOINC, ont tendance à être fortement centralisées (un serveur central distribue des tâches largement indépendantes à un grand nombre de clients), et les objectifs du projet Cépage sont à la fois d'étendre le modèle à des tâches plus dépendantes et de faire disparaître la nécessité de serveurs centraux. On est donc amené naturellement à concevoir et analyser des algorithmes distribués, souvent randomisés, et qui ne supposent qu'une connaissance très partielle et locale de l'ensemble du système.

Dans ce cadre, mes travaux de recherche passés et actuels se concentrent sur la réalisation de tâches simples, comme la diffusion d'informations (routage et *broadcast*) ou l'allocation de ressources dans un environnement distribué dont on n'a qu'une connaissance très partielle.

Prolongeant des travaux de Kleinberg sur le routage glouton dans des réseaux formés de la superposition d'un graphe connu (grille) et d'un ensemble de liens aléatoires, nous avons, avec quelques collègues bordelais et lyonnais, proposé une formalisation de la notion de *graphe petit-monde navigable* [7] et décrit un processus distribué [17] permettant, en ne disposant que d'informations locales, de transformer des graphes d'une assez grande classe en petits-mondes navigables.

En nous basant sur une structure de table de hachage distribuée (DHT) randomisée, nous avons, avec Olivier Beaumont et Mirosław Korzeniowski (alors postdoctorant au LaBRI), proposé un service générique de partage équilibré randomisé de ressources [22], en l'appliquant au problème de la diffusion de rumeurs. Les travaux de master et de début de thèse d'Hubert Larchevêque vont également dans ce sens, proposant des mécanismes distribués pour l'aggrégation de ressources satisfaisant des conditions de puissance cumulée et de faible distance.

B.3.3 Projet de recherche pour les années à venir

Au cours des années à venir, je compte continuer à mener des recherches sur les deux fronts décrits ci-dessus. Dans chaque domaine, il s'agit du prolongement naturel de ce qui a été fait jusqu'à présent.

Combinatoire énumérative En combinatoire, la poursuite de l'étude des classes de quasi-symétrie de matrices à signes alternants semble, à court terme, prometteuse. Il est probable que des formules d'énumération élégantes encore inconnues existent dans le domaine, et une étude systématique de ces classes pourrait les révéler. Les processus de génération aléatoire exactement uniforme de tels objets (par l'algorithme de "couplage depuis le passé" de Propp et Wilson, par exemple), et l'étude des propriétés des objets engendrés qui en découlent, constituent le sujet de thèse proposé à Florent Le Gac. À plus long terme, l'espoir est que l'accumulation de propriétés sur ces objets puisse déboucher sur une preuve combinatoire de la conjecture de Razumov et Stroganov, l'objectif étant de construire une chaîne de Markov sur les matrices à signes alternants (ou sur les configurations de boucles compactes qui sont en bijection naturelle avec elles) qui possède les bonnes propriétés combinatoires.

Algorithmique distribuée En algorithmique distribuée, l'objectif à court terme (y compris dans la thèse d'Hubert Larchevêque) est de mettre en place des structures de données et des algorithmes qui soient efficaces en théorie et en pratique pour la distribution de calcul dans des plates-formes peu structurées, tout en restant analysables de manière rigoureuse. Un objectif important à plus long terme serait de proposer un modèle pour la dynamique de ces plates-formes, qui soit suffisamment réaliste pour englober le comportement de réseaux de type pair-à-pair, tout en permettant de construire des algorithmes aux performances contrôlables dans de tels environnements.

B.4 Publications

L'article [6] a partagé, en décembre 2007, le prix "Outstanding Simulation Publication Award" décerné annuellement par la INFORMS Simulation Society.

Bibliographie

B.4.1 Thèse

- [1] Philippe Duchon. *Q-grammaires : un outil pour l'énumération*. Thèse, Université Bordeaux 1, 1998.

B.4.2 Revues

- [2] Philippe Duchon. Right-cancellability of a family of operations on binary trees. *Discrete Math. and Theoret. Comput. Science*, 2 :27–33, 1998.
- [3] Philippe Duchon. q -grammars and wall polyominoes. *Annals of Combinatorics*, 3 :311–321, 1999.
- [4] Cédric Chauve, Philippe Duchon, and Serge Dulucq. Une généralisation des résultats de Kreweras sur le polynôme énumérateur des inversions dans les arborescences. *Annales des Sciences Mathématiques du Québec*, 24(2-3) :23–38, 2000.
- [5] Philippe Duchon. On the enumeration and generation of generalized Dyck words. *Discrete Mathematics*, 225 :121–135, 2000.
- [6] Philippe Duchon, Philippe Flajolet, Guy Louchard, and Gilles Schaeffer. Boltzmann samplers for the random generation of combinatorial structures. *Combinatorics, Probability and Computing*, 13(4-5) :577–625, 2004.
- [7] Philippe Duchon, Nicolas Hanusse, Emmanuelle Lebhar, and Nicolas Schabanel. Could any graph be turned into a small-world? *Theoretical Computer Science*, 355(1) :96–103, 2006.
- [8] Philippe Duchon, Nicolas Hanusse, Nasser Saheb, and Akka Zemmari. Broadcast in the rendezvous model. *Information and Computation*, 204(5) :697–712, may 2006.

B.4.3 Conférences internationales

- [9] Philippe Duchon. On the enumeration and generation of generalized Dyck words. In Nantel Bergeron, editor, *Proceedings of FPSAC'1998*, pages 221–232. Fields Institute, 1998.
- [10] Maylis Delest and Philippe Duchon. Exploration de paramètres inconnus par des q -grammaires. In Conrado Martinez, Marc Noy, and Oriol Serra, editors, *Proceedings of FPSAC'99*, pages 158–167, 1999.
- [11] Philippe Duchon, Philippe Flajolet, Guy Louchard, and Gilles Schaeffer. Random sampling from Boltzmann principles. In P. Widmayer, F. Triguero, R. Morales, M. Hennessy, S. Eidenbenz, and R. Conejo, editors, *Proceedings of the 29th ICALP*, volume 2380 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 501–513. Springer, 2002.
- [12] Philippe Duchon, Nicolas Hanusse, Nasser Saheb, and Akka Zemmari. Broadcast in the rendezvous model. Présentation courte à DISC 2003, Octobre 2003.
- [13] David Auber, Maylis Delest, Jean-Philippe Domenger, Philippe Duchon, and Jean-Marc Fédou. New Strahler numbers for rooted plane trees. In Michael Drmota, Philippe Flajolet, Danièle Gardy, and Bernhard Gittenberger, editors, *Proceedings of the Third Colloquium on Mathematics and Computer Science*, Trends in Mathematics, pages 203–215, Wien, September 2004. Birkhäuser.

- [14] Philippe Duchon, Nicolas Hanusse, Nasser Saheb, and Akka Zemmari. Broadcast in the rendezvous model. In V. Diekert and M. Habib, editors, *Proceedings of STACS 2004*, volume 2996 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 559–570. Springer, 2004.
- [15] Philippe Duchon, Nicolas Hanusse, and Sébastien Tixeuil. Optimal randomized self-stabilizing mutual exclusion on synchronous rings. In Rachid Guerraoui, editor, *Proceedings of DISC'2004*, number 3274 in *Lecture Notes in Computer Science*, pages 216–229, Amsterdam, October 2004. Springer.
- [16] Philippe Duchon, Nicolas Hanusse, Emmanuelle Lebhar, and Nicolas Schabanel. Could any graph be turned into a small world? In Pierre Fraigniaud, editor, *Proceedings of DISC 2005*, number 3724 in *Lecture Notes in Computer Science*, pages 511–513, Cracow, September 2005. Springer.
- [17] Philippe Duchon, Nicolas Hanusse, Emmanuelle Lebhar, and Nicolas Schabanel. Towards small world emergence. In *Proceedings of SPAA 2006*, pages 225–232. ACM Press, 2006.
- [18] Philippe Duchon, Nicole Eggemann, and Nicolas Hanusse. Brief announcement : Non-searchability of random scale-free graphs. In *Proceedings of PODC 2007*, 2007. Brief announcement.
- [19] Philippe Duchon, Nicole Eggemann, and Nicolas Hanusse. Non-searchability of random power-law graphs. In *Proceedings of OPODIS 2007*, pages 274–285. Springer, 2007.
- [20] Olivier Beaumont, Nicolas Bonichon, Philippe Duchon, Lionel Eyraud-Dubois, and Hubert Larcheveque. A distributed algorithm for resource clustering in large scale platforms. To appear in *Proceedings of OPODIS 2008*, 2008.
- [21] Olivier Beaumont, Nicolas Bonichon, Philippe Duchon, and Hubert Larcheveque. Distributed approximation algorithm for resource clustering. In *Proceedings of SIROCCO 2008*, volume 5058 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 61–73. Springer, 2008.
- [22] Olivier Beaumont, Philippe Duchon, and Miroslav Korzeniowski. Heterogeneous dating service with application to rumor spreading. In *Proceedings of IPDPS 2008*, pages 1–10. IEEE, 2008.
- [23] Philippe Duchon. On the link pattern distribution of quarter-turn symmetric FPL configurations. In *Proceedings of FPSAC 2008*, 2008. 12 pages.
- [24] Philippe Duchon and Florent Le Gac. Exact random generation of symmetric and quasi-symmetric alternating-sign matrices. In *Proceedings of GASCOM 2008*, 2008.

B.4.4 Conférences nationales avec publication d'actes

- [25] Philippe Duchon, Nicolas Hanusse, and Sébastien Tixeuil. Protocoles auto-stabilisants synchrones d'exclusion mutuelle pour les anneaux anonymes et uniformes. In *Actes d'AlgoTel 2004*, pages 135–140, Batz sur Mer, Mai 2004. Université de Rennes.
- [26] Philippe Duchon, Nicolas Hanusse, Emmanuelle Lebhar, and Nicolas Schabanel. Could any graph be turned into a small-world? In *Actes d'AlgoTel 2005*, 2005.
- [27] Philippe Duchon, Nicole Eggemann, and Nicolas Hanusse. Non-searchability of random scale-free graphs. In *Actes d'AlgoTel 2007*, 2007.