

TD4 : Logique des prédicats du premier ordre (syntaxe)

Exercice 1.

Les définitions suivantes portent sur les entiers naturels (positifs ou nuls) :

- l'ensemble des fonctions : $G = \{\text{zéro}, \text{succ}, \text{plus}\}$
avec $\text{rang}(\text{zéro}) = 0$, $\text{rang}(\text{succ}) = 1$ et $\text{rang}(\text{plus}) = 2$.
- l'ensemble des prédicats : $P = \{\text{pair}, \text{premier}, \text{inf_strict}\}$
avec $\text{rang}(\text{pair}) = \text{rang}(\text{premier}) = 1$ et $\text{rang}(\text{inf_strict}) = 2$.
- l'ensemble des variables : $X = \{x, y, z\}$.
 1. Les expressions ci-dessous sont ou non des formules syntaxiquement correctes, des termes syntaxiquement corrects, ou non ? Justifiez en détail.
 2. Pour chaque formule syntaxiquement correcte, déterminez si elle est close et la liste de ses variables libres.

| | |
|---|--|
| 1 | $\text{plus}(x, \text{plus}(\text{zéro}, \text{succ}(\text{zéro})))$ |
| 2 | $\text{succ}(\text{zéro})$ |
| 3 | $((\text{premier}(x) \vee \text{inf_strict}(\text{zéro}, y)) \wedge \neg \text{pair}(\text{plus}(y, z)))$ |
| 4 | $\forall x \forall z (\text{premier}(\text{zéro}) \Rightarrow (\text{inf_strict}(x, z) \vee \text{pair}(\text{plus}(x, z))))$ |
| 5 | $\text{plus}(\text{plus}(\text{plus}(\text{plus}(\text{zéro}, x), y), \text{plus}(x, \text{plus}(y, z))))$ |
| 6 | $\text{pair}(x, 0)$ |
| 7 | x |
| 8 | $(\forall x \text{premier}(y) \Rightarrow \exists y \text{premier}(x))$ |
| 9 | $\exists x \forall y \exists x \forall z \text{inf_strict}(\text{zéro}, \text{plus}(x, \text{plus}(y, z)))$ |

Exercice 2.

Soit $G = \{\text{vide}, \text{Ajouter}, \text{Retirer}\} \cup \{a, \dots, z\}$

avec $\text{rang}(\text{vide}) = 0$; $\text{rang}(\text{Ajouter}) = 2$; $\text{rang}(\text{Retirer}) = 2$;
 $\text{rang}(a) = 0 = \dots = \text{rang}(z)$.

Soit $P = \{\text{Estvide}, \text{EstLettre}, \text{Contient}\}$ avec

$\text{rang}(\text{EstVide}) = 1 = \text{rang}(\text{EstLettre})$, $\text{rang}(\text{Contient}) = 2$

Soit $X = \{x_1, x_2, y_1, y_2, z_1\}$.

Les expressions suivantes sont-elles des termes syntaxiquement corrects ou non ? Les expressions suivantes sont-elles des formules syntaxiquement correctes ou non ? Justifiez en détail. Pour chaque formule syntaxiquement correcte, déterminez si elle est close et la liste de ses variables libres.

1. $\text{Ajouter}(x_1)$
2. $\text{EstLettre}(\text{Ajouter}(x_1, y_1))$
3. $\forall x_1 \text{Ajouter}(x_2, d)$
4. $\forall x_1 \text{EstVide}(\text{Ajouter}(x_2, d))$
5. $\forall x_2 \text{EstVide}(\text{Ajouter}(x_2, d))$
6. $\text{Contient}(z_1)$
7. $\text{EstLettre}(\text{Ajouter}(\text{Retirer}(x_1, a), y_1))$
8. $\exists x_1 \text{Contient}(\text{Retirer}(x_1, d), d)$
9. $\exists x_1 \text{Ajouter}(x_1, d)$
10. $\text{Ajouter}(\text{Ajouter}(\text{Ajouter}(a, b), c), d)$
11. $\text{Ajouter}(\text{Retirer}(\text{Ajouter}(a, b), c), d) \wedge \text{Retirer}(\text{Ajouter}(v, e), l)$