

TD5 : Logique des prédicats du premier ordre (sémantique)

Exercice 1.

Soit $G1 = \{g0, g1, g2\}$ avec $\text{rang}(g0) = 0$; $\text{rang}(g1) = 1 = \text{rang}(g2)$.

Soit $P1 = \{p1, p2\}$ avec $\text{rang}(p1) = 2 = \text{rang}(p2)$.

Soit $X = \{x1, x2, y1, y2, z1\}$.

1. Définissez sur $L1 = P1 \cup G1$ une interprétation $I1$ dont la sémantique correspond aux entiers relatifs (positifs ou négatifs) qui permet d'ordonner et de comparer les entiers.
2. Ecrivez un terme dont la valeur dans $I1$ est 1 et un autre dont la valeur dans $I1$ est -1.
3. Ecrivez un terme dont la valeur dans $I1$ est 2 et un autre dont la valeur dans $I1$ est -2.

Exercice 2.

Soit $G2 = \{g0, g1, g2\}$ avec $\text{rang}(g0) = 0$; $\text{rang}(g1) = 1$; $\text{rang}(g2) = 2$.

Soit $P2 = \{p1, p2\}$ avec $\text{rang}(p1) = 2 = \text{rang}(p2)$.

Soit $X = \{x1, x2, y1, y2, z1\}$.

1. Définissez sur $L2 = P2 \cup G2$ une interprétation $I2$ dont la sémantique correspond aux entiers relatifs (positifs, nuls ou négatifs) qui permet d'ordonner et de comparer les entiers.
Remarque : l'interprétation des prédicats dans $I1$ et $I2$ doivent être différents.
4. Ecrivez un terme dont la valeur dans $I2$ est 1 et un autre dont la valeur dans $I2$ est -1.
5. Ecrivez un terme dont la valeur dans $I2$ est 2 et un autre dont la valeur dans $I2$ est -2.

Exercice 3.

Soit $G = \{\text{zéro}, \text{succ}, \text{plus}\}$ avec $\text{rang}(\text{zéro}) = 0$, $\text{rang}(\text{succ}) = 1$ et $\text{rang}(\text{plus}) = 2$.

Soit $P = \{\text{pair}, \text{premier}, \text{inf_strict}, \text{egale}\}$ avec $\text{rang}(\text{pair}) = \text{rang}(\text{premier}) = 1$ et $\text{rang}(\text{inf_strict}) = 2 = \text{rang}(\text{égale})$.

Soit $X = \{x, y, z\}$.

1. Définissez sur $L = P \cup G$ une interprétation dont la sémantique correspond aux entiers naturels (positifs ou nuls)
2. Ecrivez deux termes différents dont la valeur est $5x$.
3. Ecrivez deux termes différents dont la valeur est 4 .
4. Ecrivez deux termes différents dont la valeur est $3y + 6$.
5. Combien de termes correspondent à l'entier 2 ?
6. Exprimez sous forme de formule syntaxiquement correcte les phrases suivantes (Le triple de x est $3x$) :
 - a. Il existe des entiers qui ne sont pas pairs.
 - b. Tout entier est pair.
 - c. Un entier est soit pair, soit premier.
 - d. Le double d'un nombre premier est non premier.
 - e. Il existe un entier non nul supérieur ou égal à 1.
 - f. Il existe un entier premier dont le double n'est pas pair.
 - g. Il existe un entier premier dont le double de son successeur n'est pas pair.
 - h. La somme d'un entier pair avec son successeur correspond à un entier premier.
 - i. Le double du successeur d'un entier pair est premier.
 - j. La somme d'un entier avec le double de son successeur est paire.
 - k. Le triple d'un entier strictement supérieur à 1 n'est pas premier.

- l. Tout entier premier peut être majoré par un entier pair et par une autre entier premier.
 - m. Si un entier x est inférieur à l'entier y alors tout entier supérieur à y est aussi supérieur à x .
7. Ecrivez la négation des formules suivantes (en reculant au maximum le(s) symbole(s) de négation). Donnez la traduction en français des formules initiales ainsi que de leur négation.
- a. $\forall x \quad \text{pair}(x)$
 - b. $\exists x \quad \text{premier}(x)$
 - c. $\forall x \quad (\text{pair}(x) \vee \text{premier}(x))$
 - d. $\exists x \quad (\text{pair}(x) \wedge \text{premier}(x))$
 - e. $\forall x \exists y \quad \text{inf_strict}(y, x)$
 - f. $\exists z (\neg \text{inf_strict}(y, z) \wedge (\text{inf_strict}(x, z) \vee \text{egale}(x, z)))$
 - g. $\forall x \forall y \quad (\text{inf_strict}(x, y) \Rightarrow \exists z (\neg \text{inf_strict}(y, z) \wedge (\text{inf_strict}(x, z) \vee \text{egale}(x, z))))$

Exercice 3.

Soit $G = \{\text{vide}, \text{Ajouter}, \text{Retirer}\} \cup \{a, \dots, z\}$

avec $\text{rang}(\text{vide}) = 0$; $\text{rang}(\text{Ajouter}) = 2$; $\text{rang}(\text{Retirer}) = 2$;
 $\text{rang}(a) = 0 = \dots \text{rang}(z)$.

Soit $P = \{\text{Estvide}, \text{EstLettre}, \text{Contient}\}$ avec

$\text{rang}(\text{EstVide}) = 1 = \text{rang}(\text{EstLettre})$, $\text{rang}(\text{Contient}) = 2$.

Soit $X = \{x_1, x_2, y_1, y_2, z_1\}$.

1. Définissez sur $L = P \cup G$ une interprétation dont la sémantique correspond aux ensembles de lettres.
2. Donnez la définition de la satisfiabilité d'une formule dans interprétation
3. Les formules suivantes sont-elles satisfiables dans votre interprétation ? Justifiez
 - a. $\text{Contient}(\text{Retirer}(\text{Ajouter}(\text{Ajouter}(\text{Ajouter}(\text{vide}, a), e), i), \text{Ajouter}(\text{Ajouter}(\text{Ajouter}(\text{vide}, e), h), i)), c)$
 - b. $\text{Contient}(\text{Retirer}(\text{Ajouter}(\text{Ajouter}(\text{Ajouter}(\text{vide}, a), e), i), \text{Ajouter}(\text{Ajouter}(\text{Ajouter}(\text{vide}, e), h), i)), a)$
 - c. $\text{Contient}(\text{Retirer}(\text{Ajouter}(\text{Ajouter}(\text{Ajouter}(\text{vide}, a), e), i), \text{Ajouter}(\text{Ajouter}(\text{Ajouter}(\text{vide}, e), h), i)), e)$
 - d. $\text{Contient}(\text{Retirer}(\text{Ajouter}(\text{Ajouter}(\text{Ajouter}(x_1, a), e), i), \text{Ajouter}(\text{Ajouter}(\text{Ajouter}(x_2, e), h), i)), e)$
 - e. $\text{Contient}(\text{Retirer}(\text{Ajouter}(\text{Ajouter}(\text{Ajouter}(x_1, a), e), i), \text{Ajouter}(\text{Ajouter}(\text{Ajouter}(x_2, e), h), i)), z)$
 - f. $\text{Contient}(\text{Retirer}(\text{Ajouter}(\text{Ajouter}(\text{Ajouter}(x_1, a), e), i), \text{Ajouter}(\text{Ajouter}(\text{Ajouter}(\text{vide}, e), h), b)), c)$
4. Donnez la définition de la validité d'une formule dans une interprétation.
5. Prouvez la validité des formules suivantes dans votre interprétation
 - a. $\forall x_1 \neg \text{Contient}(\text{Retirer}(x_1, a), a)$
 - b. $\forall x_1 y \neg \text{Contient}(\text{Retirer}(x_1, y_1), y_1)$
 - c. $\forall x_1 \text{Contient}(\text{Ajouter}(x_1, a), a)$
 - d. $\forall x_1 \forall y_1 (\text{EstLettre}(y_1) \Rightarrow \text{Contient}(\text{Ajouter}(x_1, y_1), y_1))$
 - e. $\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 (\text{EstLettre}(y_1) \Rightarrow ((\text{Contient}(x_1, y_1) \Rightarrow \text{Contient}(\text{Ajouter}(x_2, x_1), y_1)))$
 - f. $\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 (\text{EstLettre}(y_1) \Rightarrow (\neg \text{Contient}(\text{Ajouter}(x_1, x_2), y_1) \Rightarrow \neg \text{Contient}(x_1, y_1)))$
 - g. $\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 (\text{EstLettre}(y_1) \Rightarrow (\text{Contient}(x_2, y_1) \Rightarrow \neg \text{Contient}(\text{Retirer}(x_1, x_2), y_1)))$
 - h. $\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 (\text{EstLettre}(y_1) \Rightarrow (\text{Contient}(\text{Retirer}(x_1, x_2), y_1) \Rightarrow \text{Contient}(x_1, y_1)))$

Exercice 4. Formalisez les affirmations suivantes dans la logique des prédicats du premier ordre. Pour chaque formule.

Vous disposez des quatre prédicats suivants : **beau** (j) qui est vrai s'il fait beau le jour j ; **mer** (x, j) qui est vrai si x va à la mer le jour j ; **voisin** (x, y) qui est vrai si x est voisin de y ; et **suisvant** ($j1, j2$) qui est vrai si $j2$ est le jour qui suit $j1$.

Vous disposez aussi de deux constantes **moi** et **aujourd'hui**.

- a. Aujourd'hui il fait beau.
- b. Les jours où il fait beau, je vais à la mer
- c. Je ne vais jamais à la mer les jours où il ne fait pas beau
- d. Au moins un de mes voisins ne va jamais à la mer le même jour que moi
- e. Les jours où il fait beau, tous les voisins de mes voisins vont à la mer
- f. Aucun de mes voisins ne va à la mer deux jours de suite.
- g. Il ne fait jamais beau plus de deux jours de suite.

Exercice 5. Exprimez les affirmations suivantes en logique des prédicats du premier ordre. Pour chaque formule obtenue, donner une interprétation qui la rend fausse et une autre que la rend vraie ; avec $P = \{a, b, c, d, e, f, x, y, z\}$ avec $\text{rang}(a) = 0 = \text{rang}(b) = \text{rang}(c) = \text{rang}(d) = \text{rang}(e) = \text{rang}(f) = \text{rang}(x) = \text{rang}(y) = \text{rang}(z)$. P ensemble des prédicats.

- a. Soit x est vrai soit y est vrai (« ou exclusif »)
- b. Si a, b ou c est vrai alors x, y ou z est vrai
- c. Si un seul parmi a, b et c est vrai alors un seul parmi x, y et z est vrai
- d. Au moins deux propositions parmi les trois propositions a, b et c sont vraies
- e. Les propositions a et b ne sont jamais toutes les deux vraies sauf si la proposition c est vraie ; auquel cas les propositions d et e sont vraies.

Exercice 6. Logique des prédicats du premier ordre

$X = \{x\}$, $P = \{h, m, g\}$ $\text{rang}(h) = \text{rang}(m) = \text{rang}(g) = 1$

$h(x) = \text{« } x \text{ est un être humain »}$ $m(x) = \text{« } x \text{ est mortel »}$ $g(x) = \text{« } x \text{ est grec »}$

1. Ecrivez les formules correspondant aux énoncés suivants, et trouvez les relations logiques entre ces énoncés :

- a. Tous les êtres humains sont mortels
- b. Tous les êtres humains sont immortels
- c. Aucun être humain n'est mortel
- d. Aucun être humain n'est immortel
- e. Il existe un homme immortel
- f. Il existe un homme mortel